7379

Й ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

II

75

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Липецк

Дата 24.03.2018

* *

Вариант 6

1. В клетках таблицы 4×6 расставлены натуральные числа так, что все десять сумм этих чисел в строках и столбцах таблицы различны. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.

2. Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения

$$A=\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)^3+\left(b^2+\frac{1}{cd}\right)^3+\left(c^2+\frac{1}{da}\right)^3+\left(d^2+\frac{1}{ab}\right)^3.$$

3. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Через точки A и M проведена окружность ω_1, касающаяся прямой AC, а через точки B и M — окружность ω_2, касающаяся прямой BC. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D. Точка E лежит внутри треугольника ABC и симметрична точке D относительно прямой AB. Найдите угол CEM.

4. На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение содержит три цифры С и по одной И, К и 0, причем старшая его цифра равна С. Что написано на доске?

5. По краю круглого стола стоят $2n$ пустых стаканов ($n \geqslant 2$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в пустые стаканы апельсиновый и яблочный сок. За один ход каждый игрок выбирает два пустых стакана и заполняет их одинаковым видом сока (на свой выбор). Игра заканчивается, когда все стаканы заполнены. Петя хочет добиться того, чтобы по окончании игры образовался такой стакан, что в соседние с ним стаканы налит сок противоположного вида. При каких n он может добиться своей цели вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат шары радиусов 4, 4, 5, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса C находится на столе, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Точка C равноудалена от центров двух равных шаров, а третьего шара конус касается образующей, перпендикулярной столу. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

лист 1

№1

Все числа натуральные, а суммы строк и столбцов различны.

— Min сумма строки или столбца равна $1+1+1+1=4$.

S — сумма всех чисел таблицы.

Тогда, $2S \geq 4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=85$

Сумма всех строк равна сумме всех столбцов и равна S.

$2S$, как четное число, не может равняться 85, поэтому $2S \geq 86$.

Значит, $S \geq 43$.

Пример с $S=43$ (минимальное):

1	1	1	1	— (4)
1	1	1	2	— (5)
1	1	3	1	— (6)
1	4	1	1	— (7)
1	1	1	6	— (9)
3	2	4	3	— (12)
(8)	(10)	(11)	(14)	

Ответ: 43.

~~№4~~

~~А(с,е,с,и,к,о), с — 1 цифра~~

N2 лист N2

$$A=\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)^3+\left(b^2+\frac{1}{cd}\right)^3+\left(c^2+\frac{1}{da}\right)^3+\left(d^2+\frac{1}{ab}\right)^3$$

$a, b, c, d > 0.$

Тогда, $a^2+\frac{1}{bc}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}}=x$, $b^2+\frac{1}{cd}\geqslant 2\sqrt{\frac{b^2}{cd}}=y$, $c^2+\frac{1}{da}\geqslant 2\sqrt{\frac{c^2}{da}}=z$, $d^2+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{d^2}{ab}}=t$

Заметим, что $xyzt=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

$A\geqslant x^3+y^3+z^3+t^3$

$x^3+y^3\geqslant 2\sqrt{x^3y^3}$, $z^3+t^3\geqslant 2\sqrt{z^3t^3}$

$\cancel{x^3+y^3\geqslant 2\sqrt{x^3}}$.

$2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3t^3}\geqslant 2\cdot2\cdot(x^3\cdot y^3\cdot z^3\cdot t^3)^{\frac14}=4\cdot(xyzt)^{\frac34}=$
$=32$

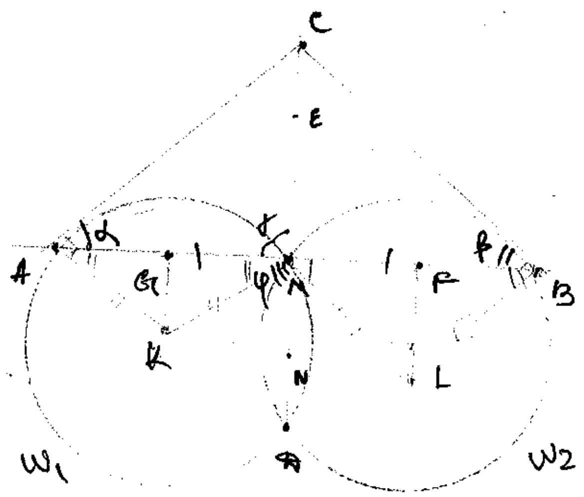
Значит, $A\geqslant 32$.

min значение достигается тогда и только тогда, когда все неравенства обращаются в равенства.

Это верно при $a=b=c=d=1$.

Ответ: 32

N3



Дано: $\triangle ABC$, $AM=MB$

$w_1\cap w_2=M$

$w_1\cap w_2=D$

E лежит внутри $\triangle ABC$

E - симметрич. D относит. AB

$\angle CEM$-?

лист N3

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle AMC = \gamma$, $\angle AMD = \varphi$.

1) по теореме синусов в $\triangle AMC$:

$$\frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{AM}{\sin\angle ACM},$$

$$\frac{MC}{AM} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\gamma-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+\alpha)}$$

по теореме синусов в $\triangle BMC$:

$$\frac{MC}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin\angle BCM}$$

$$\frac{MC}{BM} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle BCM} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-(\pi-\gamma)-\beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$$

т.к. $BM = AM$, то $\frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+\alpha)} = \frac{MC}{AM} = \frac{MC}{BM} = \frac{\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}$

$$\sin\alpha\cdot\sin(\gamma-\beta) = \sin\beta\cdot\sin(\gamma+\alpha)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta = \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha +$$
$$+\sin\beta\cdot\cos\gamma\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\gamma\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha) = 2\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

2) K - центр окр. ω_1, L - центр окр. ω_2, тогда $AC \perp AK$, $BL \perp BC$, т.к. A, B - одновременно принадлежат и касат. и окр., то они - точки касания

$\triangle BLM$ - равнобедр. $(BL = BM = r_2) \Rightarrow \angle BML = \angle MBL = \angle CBL -$ $- \angle CBA = \frac{\pi}{2} - \beta$, $FM = \frac{BM}{2} = \frac{AB}{4}$, $FL = \operatorname{tg}\angle BML\cdot FM = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot$

$\cdot\frac{AB}{4} = \operatorname{ctg}\beta\cdot\frac{AB}{4}$

Лист N4

$\triangle AKM$ - равнобед. $(AK = AM = r_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMK = \angle MAK = \angle CAK - \angle CAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$GM = \frac{AM}{2} = \frac{AB}{4}$,

$GK = tg\angle AMK \cdot GM = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \frac{AB}{4} = ctg\alpha \cdot \frac{AB}{4}$

$tg\varphi = tg(\pi - \angle FMN) = tg(\pi - (2\cdot\pi - \angle MFL - FLN - \angle LNM)) =$

$= tg\left(\pi - 2\pi - \frac{\pi}{2} - \angle FLK - \frac{\pi}{2}\right) = tg(\angle FLK) = \frac{FG}{FL - GK} = \frac{AB}{2} : \left(ctg\beta \cdot \frac{AB}{4} -\right.$

$\left.- ctg\alpha \cdot \frac{AB}{4}\right) = \frac{2}{ctg\beta - ctg\alpha} = \frac{2}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta\cdot\sin\alpha - \cos\alpha\cdot\sin\beta} =$

$= 2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

3) $0 < \gamma < \pi$, $0 < \varphi < \pi$

$tg\gamma = tg\varphi \Rightarrow \varphi = \gamma \Rightarrow$ т.A при отражении относит. AB оказывается на луче MC

тогда возможно 3 варианта расположения т. E:

а) E между M и C, тогда

$\angle MEC = \pi$

б) $E = C$, тогда $\angle MEC$ - не определен

в) E вне отрезка MC

$\angle EMC = 0$

~~Ответ: $\angle CEM = \pi$.~~

Ответ: $\angle MEC$ может принимать значение 0 и π.

N6

1. ~~рис 1: C, E — центры шаров радиуса 4~~

~~M — центр шара радиуса 5~~

~~A, B, C — т.~~

N4

Пусть Ч — это a, К — это в, С — это c

$\overline{ЧКС} = 100a + 10в + c$, $\overline{КСЧ} = 100в + 10c + a$

$\overline{ЧКС}$ дает остаток $a+в+c$ при делении на 9

$\overline{КСЧ}$ дает остаток $в+c+a$ при делении на 9

Значит $n = \overline{ЧКС} \cdot \overline{КСЧ}$ дает остаток $(a+в+c)^2$ при делении на 9.

С другой стороны, сумма цифр $n = 3 \cdot c + a + в$

$\Rightarrow (a+в+c)^2 - 3 \cdot c - a - в \;\vdots\; 9$.

Если c дает остаток 2 при делении на 3, тогда

$(a+в+2)^2 - a - в \;\vdots\; 3$

$(a+в)^2 + 3(a+в) + 4$ делится на 3, но

$(a+в)^2 + 4$ может давать только ост. 1 или 2 при делении на 3. нет решений.

Если c дает ост. 1 при делении на 3, тогда

$(a+в+1)^2 - 3 - a - в = (a+в-1)(a+в+2)$ делится на 3,

значит, $a+в$ дает остаток 1 при делении на 3.

Если c делится на 3, тогда $(a+в)^2 + (2c-1)(a+в) \;\vdots\; 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+в)(a+в+2c-1) \;\vdots\; 9$

Если $a+в \;\vdots\; 3 \Rightarrow a+в+2c-1$ не делится на 3 $\Rightarrow$

$a+в$ делится на 9.

Если $a+в$ не делится на 3 $\Rightarrow a+в+2c-1$ делится на 9. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a+в$ дает ост. 1 при делении на 3.

лист N5

Итак, $c \neq 2, 5, 8$

$n = 10^5 \cdot c + k$, где k – число, составленное из цифр $c, c, a, b, 0$.

$n_1 = (100a + 10b + c)(100b + 10c + a) =$

$= 10\,000ab + 1000(ac + b^2) + 100(a^2 + 2bc) + 10(ab + c^2) + ac.$

$c = 1 \Rightarrow a + b$ дает ост. 1 при делении на $3 \Rightarrow a + b = 4, 7, 10, 13, 16.$

если $ab \geq 19 \Rightarrow ac + b^2 \geq 10 \Rightarrow n \geq 190000 + 10000 = 200\,000.$

реш. нет.

$ab \leq 18 \Rightarrow (a, b) = (9, 2), (8, 2), (7, 2), (6, 2), (5, 2),$

$(5, 3), (4, 2), (4, 3)$ и симметрич. пары.

под условие $a + b = 4, 7, 10, 13, 16$ подойдут только

$(a, b) = (8, 2), (5, 2), (4, 3)$ и симметрич. пары.

$821 \cdot 218 = 178978$, $281 \cdot 812 = 228172$, $521 \cdot 215 = 112015$,

$251 \cdot 512 = 128512$, $431 \cdot 314 = 135334$, $341 \cdot 413 = 140833$.

Подходит только $521 \cdot 215 = 112015.$

$c = 3 \Rightarrow a + b \,\vdots\, 9$ или $a + b$ дает ост. 4 при делении на $9. \Rightarrow a + b = 4, 9, 13.$

$n - 3a \,\vdots\, 9$

если n оканчив. на c, то $3a - 3 \,\vdots\, 10 \Rightarrow a = 1.$

нет решений.

если n оканчив. на 0 аналогично.

если n оканчив. на a то $2a \,\vdots\, 10 \Rightarrow a = 5.$

$(a, b) = (5, 4), (5, 8).$

$543 \cdot 435 = 236205$, $583 \cdot 835 = 486805$ – не подход.

если n оканчив. на $b \Rightarrow b - 3a \vdots 10$

$b = m - a$, где $m = 4, 9, 13 \Rightarrow b - 3a = m - 4a \Rightarrow$

$\Rightarrow m$ – четно.

$a + b = 4$ – нет решений

$c = 9 \Rightarrow a + b \vdots 9$ или $a + b$ дает ост. 1 при делении на 9. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 9, 10$.

$n - 9a \vdots 10 \Rightarrow n + a \vdots 10$.

если n оканчив. на c, то $a + 9 \vdots 10 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 8$.

$189 \cdot 891 = \cancel{189}\ 168399$

если n оканчив на 0, $a \vdots 10$, нет реш.

если n оканчив на a, то $2a \vdots 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow (a; b) =$

$= (5, 4)$.

$549 \cdot 495 = 271755$ – не подх.

если n оканчив на $b \Rightarrow b + a \vdots 10 \Rightarrow a + b = 10$

$ab \leq 24$, $ac + b^2 = 9a + b^2 \leq 100 \Rightarrow n < 900000$.

нет решений

$c = 6 \Rightarrow a + b \vdots 9$ или $a + b$ дает ост 7 при делени на 9 $\Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 7, 9, 16$.

$a + b \leq 9 \Rightarrow ab \leq 20$

$ac + b^2 = 6a + b^2 \leq 100 \Rightarrow n < 600.000$. нет решений

$a + b = 16 \Rightarrow (a, b) = (9, 7), (7, 9)$.

$976 \cdot 769 = 750544$,

$796 \cdot 967 = 769732$ — не подх.

$c = 7 \Rightarrow a+b = 4, 7, 10, 13, 16$.

$a+b \leq 10 \Rightarrow ab \leq 24$, $ac + b^2 \leq 100 \Rightarrow n < 700000$.

значит, $a+b=13$ или 16.

для $a+b=16$ нет реш., поскольку $c=7$, поэтому $a+b=13$.

$n - 7a \vdots 10 \Rightarrow n + 3a \vdots 10$

если n оканчив. на c, то $3a+7 \vdots 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a - 3 \vdots 10 \Rightarrow a = 1$ — нет. реш.

если n оканчив на 0, то $3a \vdots 10$ — нет реш.

если n оканчив на a, то $4a \vdots 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) = (5, 8)$.

$587 \cdot 875 = 513625$ — не подх.

$c = 4 \Rightarrow a+b = 4, 7, 10, 13, 16$.

аналогично

$a+b = 10, 13$ или 16.

$n - 4a \vdots 10$

если n оканчив. на c, то $4a - 4 \vdots 10 \Rightarrow a = 1$ или $6 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) = (1, 9), (6, 7)$.

$194 \cdot 941 = 182554$, $674 \cdot 746 = 502804$.

если n оканчив на 0, то $4a \vdots 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 5 \Rightarrow (a, b) = (5, 8)$.

$584 \cdot 845 = 493480$.

если n оканчив на $a \Rightarrow 3a \,\vdots\, 10$. нет реш.

если n оканчив. на $b \Rightarrow b - 4a \,\vdots\, 10$

$b = m - a$, где $m - 10, 13, 16 \Rightarrow m - 5a \,\vdots\, 10 \Rightarrow m \,\vdots\, 5$

$a + b = 10$, a – четн. $\Rightarrow (a, b) = (2, 8); (8, 2)$

$284 \cdot 842 = 239128$

$824 \cdot 248 = 204352$

Ответ: $521 \cdot 215 = 112015$.

N6

~~∃ D, E – центры шаров R = 4~~
~~F – центр шара R = 5~~
~~A, B, C – точки касан. шаров с плоскостью~~
~~D~~

Ответ: $\arcsin \frac{7}{25}$

N5.

Петя может добиться цели, только, если

~~он ходит последним~~ $\Rightarrow$ ~~$2n = 2k,\ k \geq 3,$~~

~~т.к. n =~~ $n = 2k + 1$, где ~~[illegible]~~, $k \in \mathbb{Z}$

$n \neq 2$, т.к. при ходе П–В все стаканы могут заполниться 1 соком.

Ответ: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$