КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

4008 60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Витебск

Дата 15.03.2018

* *

Вариант 7

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 7×7 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×4 была хотя бы одна отмеченная клетка?

2. Даны числа $x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите минимальное значение выражения

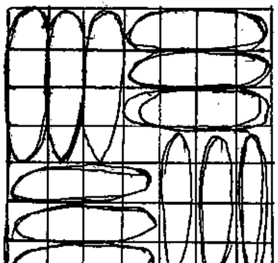
$$A = \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Окружность ω_1 касается прямой AB в точке A и проходит через точку C, а окружность ω_2 касается прямой AC в точке A и проходит через точку B. В точке A к окружности ω проведена касательная, которая вторично пересекает окружность ω_1 в точке X и вторично пересекает окружность ω_2 в точке Y. Найдите отношение $\frac{AX}{XY}$.

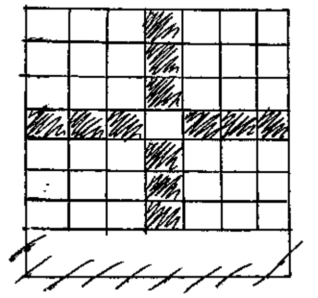
4. На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам, из которых ровно одна четна. Это произведение пятизначное и одинаково читается слева направо и справа налево. Что написано на доске?

5. В вершинах правильного $2n$-угольника расставлены пустые чашки. Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в чашки чай. За один ход можно налить чай либо в одну пустую чашку, либо в две симметричные относительно центра $2n$-угольника чашки, если они обе пустые. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат два шара радиуса 4, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Расстояния от вершины конуса до точек касания шаров со столом равны 5. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

(1.) 

Таблицу 7×7 можно разбить на 12 прямоугольников 1×4, как показано на рисунке (⬭ - место нахождения прямоугольника)
Соответственно количество выбранных клеток больше либо равно 12.
Покажем, что достаточно выбрать 12 таких клеток:



▨ - клетки, которые надо отметить, чтобы в каждой вертикальной горизонтальной полоске 1×4 была хотя бы 1 отмеченная клетка.

Ответ: 12

(4.) Т.к. по условию мы должны получить 5-значное число $И \le 3$. Рассмотрим случаи:

1) $И = 3$.
~~КК~~ $k \le 3$, $c \le 3$ (т.к. если хотя бы одно из чисел (k, c) больше 3, число получится 6значным, к примеру $\overline{34c}\cdot\overline{3c4}$ - всегда 6значное).
По условию, все цифры $И, k, C$ различны и ненулевые тогда $И=3$, $K=2$, $C=1$ (или $И=3$; $K=1$, $C=2$, но это не имеет значения, т.к. при перестановке этих двух чисел: $\overline{ИCK}$ и $\overline{ИKC}$, мы получим те же числа).
$321\cdot312 = 100.152$ - не подходит

2) $И=2$; Тогда k и c - нечётные (по условию).

$$A = \overline{ИKC}\cdot\overline{ИCK} = (100И+10k+c)(100И+10c+k) =$$

$$= \underbrace{И^2\cdot 10.000}_{ч} + \underbrace{И\cdot 1100(k+c)}_{ч} + \underbrace{81ck}_{нч} + \underbrace{10(k+c)^2}_{ч} \quad (*)$$

Тогда конечное число A - нечётное и заканчивается (соответственно и начинается) на нечётную цифру.
Т.к. $И=2$ первая цифра меньше 9 и больше 3.
Значит первая цифра либо 5, либо 7. Рассмотрим:
а) Если начинается и заканчивается на 5, то число A кратно 5. Тогда исходя из равенства (*) $81ck \vdots 5$.
Значит либо c, либо k равно 5.

подставим в (*): $51\cdot 250 + 2705k + 10k^2 = A$. и k может равняться 1, 3, 7 или 9. При $k = 3, 7$ или 9 A - будет начинаться не на 5; при $k = 1$, $A = 53965$ — не подходит.

б) Если начинается и заканчивается на 7, то исходя из равенства (*) $81ck$ должно оканчиваться на 7, тогда $ck = \overline{x7}$. Т.к. c и k - однозначные числа, $ck = 3\cdot 9$ или $ck = 1\cdot 7$.

Проверим: $239\cdot 293 = 70.027$ — не подходит

$217\cdot 271 = 58.807$ — не подходит.

3) $И = 1$. Тогда K и C разной чётности

$$A = \underbrace{И^2\cdot 10.000}_{ч} + \underbrace{И\cdot 1100(k+c)}_{ч} + \underbrace{81ck}_{ч} + \underbrace{10(k+c)^2}_{ч} \quad (**)$$

тогда A - чётное, первая и последняя цифра - чётные

т.к. $И = 1$, первая цифра больше 0 и меньше 4.

Значит первая и последняя цифры числа A равны 2.

И исходя из (**) $81ck$ заканчивается на двойку,

и $ck = \overline{y2}$
$$\left[\begin{array}{l} ck = 2\cdot 1 \to \varnothing \\ ck = 3\cdot 4 \\ ck = 2\cdot 6 \to \varnothing \\ ck = 8\cdot 4 \to \varnothing \\ ck = 6\cdot 7 \\ ck = 9\cdot 8 \end{array}\right.$$

Остаётся проверить произведение:

а) $134\cdot 143 = 19162$ → не подходит

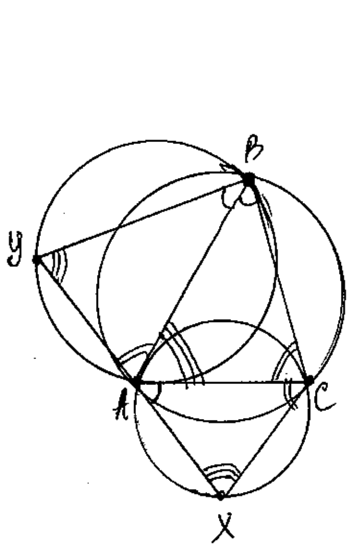
б) $167\cdot 176 = 29392$

в) $189\cdot 198 = 37422$ → не подходит.

Числа 167 и 176 подходят по условию.

Ответ: ~~167~~ произведение чисел 167 и 176; 29392

(3)



Решение:

1. $\angle YBA = \angle CAX$ (т.к. AC - касат. к окружности)
2. $\angle ACX = \angle YAB$ (т.к. AB - касат. к окр.).
3. $\angle BYA = \angle AXC$ (из $\triangle AYB$ и $\triangle XAC$).
4. $\angle ABC = \angle CAX$, $\angle BCA = \angle BAY$ (т.к XY - касательная к ω)
5. $\triangle YBA \sim \triangle XAC \sim \triangle ABC$.

$$\frac{YB}{XA} = \frac{BA}{AC} = \frac{YA}{XC} \quad и \quad \frac{XA}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{XC}{AC},$$ из этого

следует: $\frac{XA}{AB}\cdot\frac{BA}{AC} = \frac{YA}{XC}\cdot\frac{XC}{AC} \Rightarrow XA = YA$.

6. $XY = 2XA$.

7. $\frac{AX}{XY} = \frac{AX}{2AX} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

(5) при $n=2k$

При правильной игре Васи (опишем его стратегию):
Если Петя выбирает две симметричные чашки, то Вася выбирает тоже две симметричные. Если Петя выбирает одну чашку, то Вася выбирает чашку не симметричную ей. Если Петя выбрал чашку, симметричную уже выбранной, то Вася выбирает чашку, симметричную выбранной ранее. Такие ходы возможны, т.к. кол-во пар – чётно, а за каждый ход Пети и Васи (вместе) уходят две пары либо ~~убираем~~ теряем возможность убирать сразу две чашки в каждой паре. При этом, если Петя забрал чашку из таких пар, то Вася сможет сделать такое же действие, т.к. пар – чётно. Поэтому существует такой ход для Васи, при котором пар, для которых можно убрать две чашки, не останется. А значит, т.к. каждым ходом Петя и Вася (вместе) мы убираем чётное число чашек, ~~в конце~~ то чашек останется чётное кол-во и тогда каждый может убирать по одной чашке; понятно, что победит Вася.

при $n=2k+1$

Первым ходом Петя убирает две симметричные чашки, ~~при этом~~ после этого хода остаётся $4k$ чашек. Далее, применив стратегию, описанную выше, победит Петя.

Ответ: $n=2k+1$.

(2) $A = \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x)$

$$A = 2\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+z-2y}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{z-x}{2}\right) - 1 =$$

$$= 2\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x+z-2y}{2}\right) + \cos\left(\frac{z-x}{2}\right)\right) - 1 =$$

$$= 2\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{z-y}{2}\right) - 1 = 4\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{z-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1 \; *$$

$*$ $0 \le x, y, z \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le |x-z|, |x-y|, |z-y| \le \frac{\pi}{2}$

$0 \le \left|\frac{x-z}{2}\right|, \left|\frac{x-y}{2}\right|, \left|\frac{z-y}{2}\right| \le \frac{\pi}{4}$.

$\cos\left(\frac{x-z}{2}\right);\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right);\ \cos\left(\frac{z-y}{2}\right) \ge \cos\frac{\pi}{4};\ 4\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{z-y}{2}\right) - 1 \ge \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\cdot 4 - 1;\ A \ge \sqrt{2} - 1$

Это значение достигается при каждом значении $\cos\frac{x-z}{2} = \cos\frac{z-y}{2} = \cos\frac{z-x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = z = x-y = z-y = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\sqrt{2} - 1$.