85

6452

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 18.03.2018

* *

Вариант 10

1. В таблице 3×4 расставлены 12 чисел так, что все семь сумм этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться нулю?

2. Даны числа $x, y, z \in [0, \pi]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x).$$

3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки Q и R соответственно. Прямая QR вторично пересекает описанную окружность треугольника ABR в точке P и вторично пересекает описанную окружность треугольника BCQ в точке S. Прямые AP и CS пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми KO и QR.

4. На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Это произведение шестизначное, его крайние цифры равны, а между ними находятся две пары одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?

5. По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них компот или лимонад. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан любым из двух напитков на свой выбор. Игрок, после чьего хода образовался стакан с лимонадом, у которого оба соседних стакана с компотом, выигрывает. Если игроку не досталось пустого стакана, то он проигрывает. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат два шара, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи, соединяющие вершину конуса с центрами шаров, образуют равные углы со столом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Задача № 1

Ответ: 8 нулей

Пример:

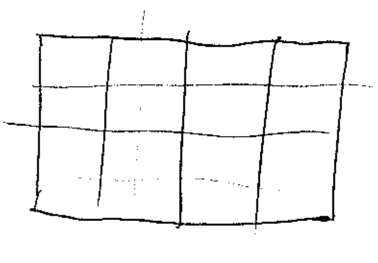
0	0	8	9	17
5	7	0	0	12
0	0	0	0	0
5	7	8	9	

Действительно, условие выполняется, все семь сумм разные. В такой таблице 8 нулей.

Оценка: $\exists$ можно за большее количество нулей, тогда их как минимум 9, значит чисел отличных от нуля как максимум 3. Тогда по принципу Дирихле существует столбец (их 4) в котором все нули. Значит не должно существовать строк (их 3) в которых все нули. Чисел отличных от нуля как максимум три, строк ровно 3 $\Rightarrow$ не существует строки в которой стоит 2 числа (отличных от 0). (если есть, то существует строка с суммой 0).

Так же заметим, что у нас 4 столбца и как максимум 3 числа. Двух столбцов с суммой 0 быть не должно, значит нет столбца, в котором 2 числа отличных от 0. (если есть, то существует 2 столбца с суммой 0)

Т.о. нет столбца, в котором 2 числа отличных от 0 и нет строки, в которой 2 числа отличных от 0.



Рассмотрим любое число, отличное от 0 — a (если его нет, то все 0, сумма везде 0, противоречие)

Это число a стоит в строке и в столбце причем других ненулевых чисел в строке и в столбце нет, значит в столбце и в этой строке сумма чисел равна a. Противоречие.

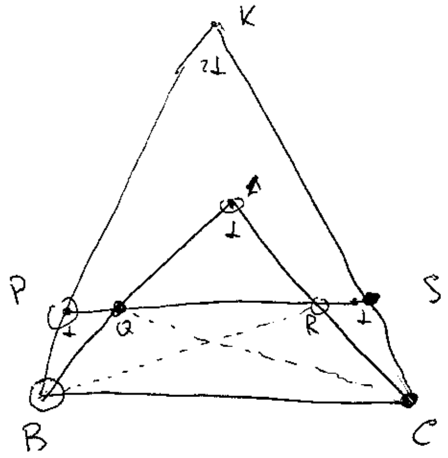
значит ≥ 9 нулевая

Ответ: 8 нулей

Задача №3

Посмотрим, как могут располагаться точки.

I пусть AP и CS пересекаются за точкой A „сверху“



точки $PARB$ лежат на одной окр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = \angle BPR = \alpha$

точки $AQCS$ лежат на одной окр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle QAC = \angle QSC = \alpha$

$\angle BPS = \angle PSC = \alpha \Rightarrow \angle KPS = \angle KSP = 180 - \alpha \Rightarrow \angle PKS = 2\alpha$

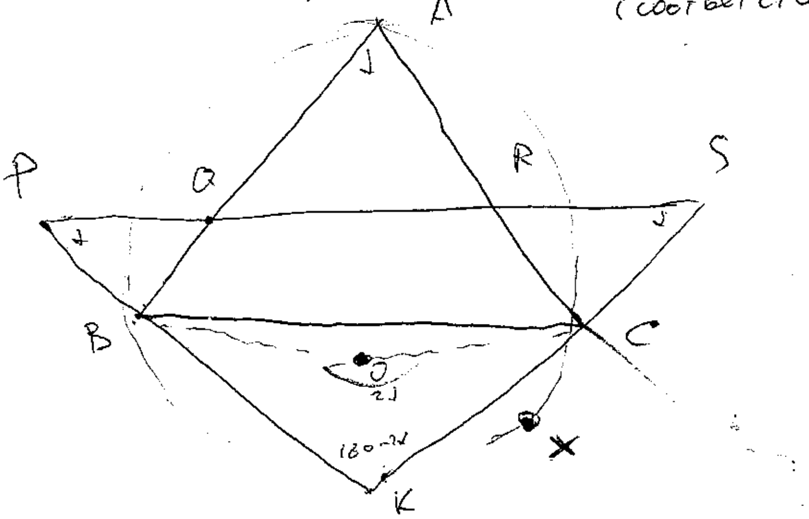
~~$\angle PKS = 2\alpha$~~ $\qquad \angle BKC = 2\alpha$

$\angle$ ' $\qquad \angle BAC = \alpha$, но т.к. точка A внутри $\triangle BKC$,

$\left.\begin{array}{l} \angle KBC > \angle ABC \\ \angle KCB > \angle ACB \end{array}\right| \Rightarrow \angle ABC > \angle BKC$. противоречие.

Значит они пересекаются „внизу“ от A.

Теперь посмотрим на вариант, когда центр окружности лежит по другую сторону от BC, чем точка A (соответственно с одной стороны с точкой K)



Точки $PABC$ лежат на одной окр $\Rightarrow \angle BPR = \angle BAR = \alpha$

Точки $AQCS$ лежат на одной окр $\Rightarrow \angle QAC = \angle QSC = \alpha$

Т.о. $\angle PKS = 180 - \alpha - \alpha =$

$= 180 - 2\alpha$

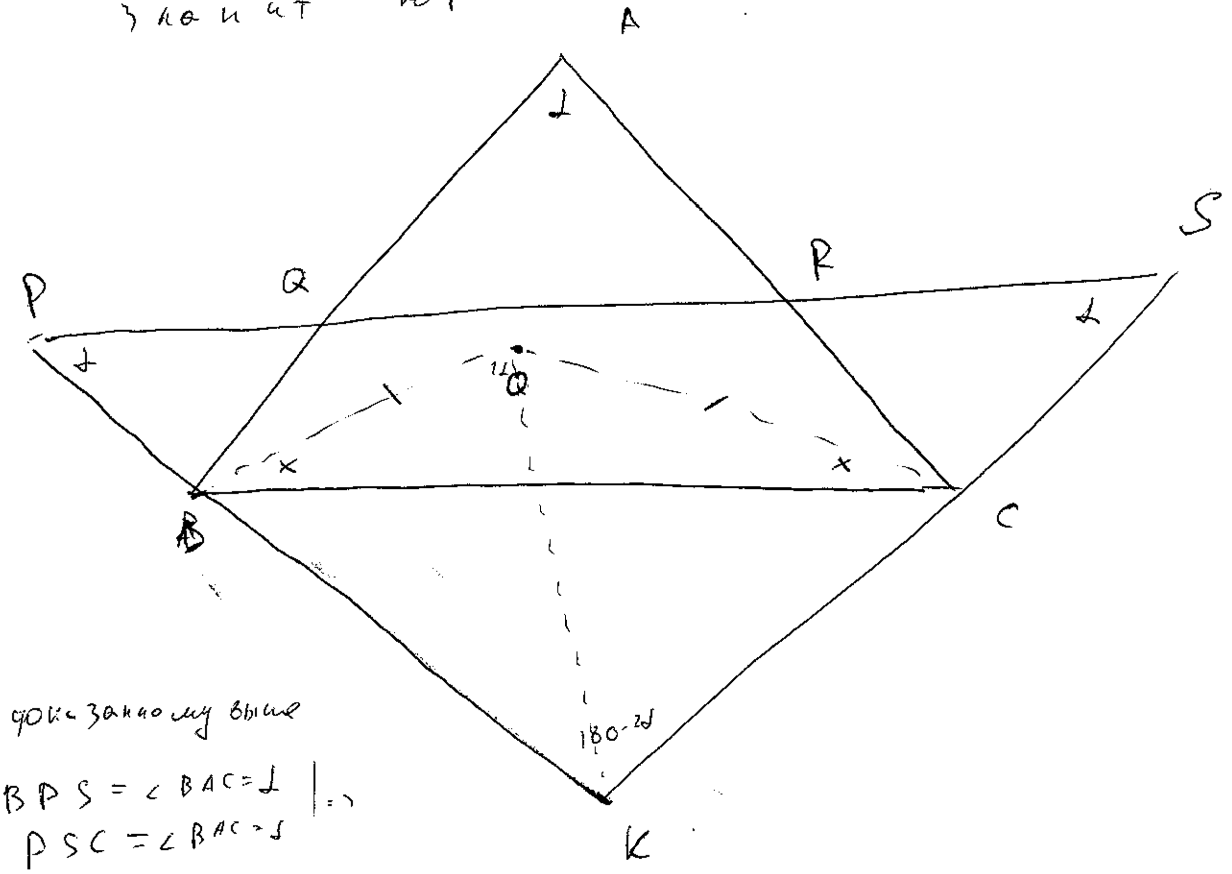
3 ω - описанная окружность △ABC. Точка X на этой окружности такая, что X и A лежат по разные стороны от BC.

Тогда $\angle BXC = 180 - \alpha$. $\Rightarrow \angle BOC = 2 \cdot \angle BXC = 360 - 2\alpha$.

Тогда $360 - \angle BOC = 2\alpha$. Значит точки BOCK лежат на одной окружности (сумма противоположных углов $= 180^\circ$)

То тогда точка O не может находиться по одну сторону с K от прямой BC.

Значит картинка такая:



по доказанному выше

$\angle BPS = \angle BAC = \alpha$ $\Big| \Rightarrow$
$\angle PSC = \angle BAC = \alpha$

$\Rightarrow \angle PKS = 180 - 2\alpha$

$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha \Rightarrow$ BOCK лежат на одной окружности.

O - центр окружности $\Rightarrow |BO| = |OC| \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC = x$

~~∠BCK = ∠B~~ $\angle OKB = \angle OCB = x$ $\Big| \Rightarrow$ KO - биссектриса $\angle PKS$
$\angle OKC = \angle OBC = x$

$\angle KPS = \angle KSP \Rightarrow \triangle KPS$ - равнобедренный. KO - бисс-са $\Rightarrow$ высота.

$\Rightarrow (KO) \perp (PS)$. Значит угол между прямыми равен 90°

Ответ: 90°

3

Чистовик:

Задача № 2.

Найти максимальное значение выражения

$A = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$

Заметим, что $\sin\alpha > 0$, $0 < \alpha < \pi$

$\sin\alpha < 0$ $\quad -\pi < \alpha < 0$

(в условии нашей задачи)

все углы от $[0;\pi]$ => все разности чисел

лежат от $-\pi$ до π (включая)

пусть все три ~~синуса поло~~ аргумента синусов положительные

числа, тогда $\begin{cases} x-y>0 \\ y-z>0 \\ z-\cancel{y}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>y \\ y>z \\ z>x \end{cases}$ – противоречие.

Значит все три синуса не могут принимать положительные
значит хотя бы одно значение синуса неположительное
значения. Тогда максимально возможное значение

выражения, которое можно получить $(-1 \leq \sin x \leq 1)$

это $\underbrace{1+1}_{\text{максимальные полож. значения}}+\overbrace{0}^{\text{максимальное неположительное значение}}=2$.

Оно действительно достигается при

$x = \pi$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$.

$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(-\pi) =$

$= 1 + 1 + 0 = 2$.

2

Ответ: $A = 2$

И

чистовик

Задача №5

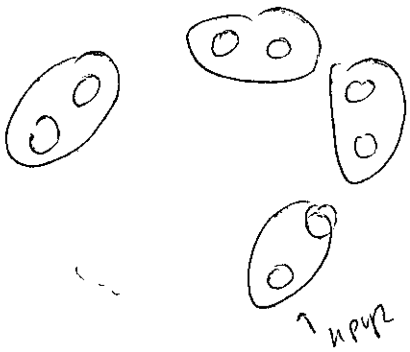
Ответ: Петя выигрывает при нечётных n.

1. Покажем, что для чётных n у второго (Васи) есть выигрышная стратегия.

Для удобства будем называть Петю первым, а Васю вторым.

Покажем тактику за второго при чётных n.

Разобьём все стаканы на пары вот так:



Так можно сделать потому что их чётное количество, тогда второй будет наливать в ту же пару, что и первый, причем тот же напиток.

Заметим, что после хода ~~первого~~ в стакан первого выполняется ~~в~~ ~~стакан~~, ~~так~~, что второй стакан в паре пустой т.к. ~~все~~ каждый ход второй „закрывает" „открытую" пару

„открытая" - где один стакан не налит, а второй нет

„закрывает" - наливает во второй стакан в паре.

получается первый „открывает" пары.

После хода первого комбинация (1) (2) (3) $\underline{К\ Л,\ К}$ получиться не может, т.к.

если он налил в стакан (3), то (1) и (2) в паре (он наливает в неоткрытую пару). но (1) и (2) должны содержать одинаковый напиток по стратегии 2ого. Такого не может быть.

Аналогично он не мог налить в стакан (1).

Т.к. стаканов чётное количество, то (2) в паре либо с (3) либо с (1) и в него первый тоже налить не мог т.к. закрывает стаканы только второй.

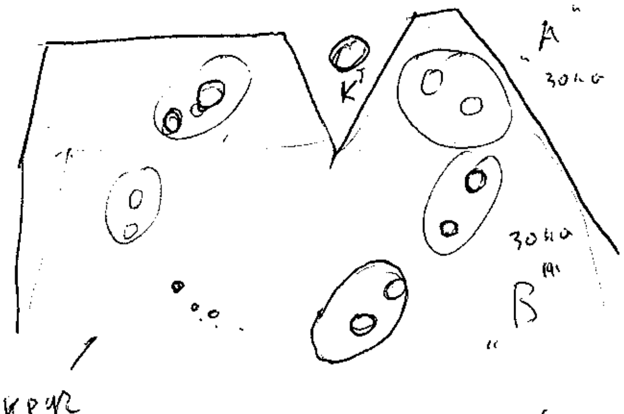
(5) Значит первый не мог выиграть образованием К Л К.

№5 (продолжение) чистовик

но он также не мог выиграть, заполнив последний стакан т.к. их чётное количество. => по такой стратегии первый выиграть не может а т.к. стаканов конечное кол-во => => игра конечна => первый проигрывает.

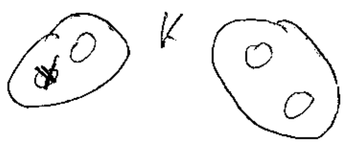
Теперь покажем выигрышную стратегию для первого при нечётном n.

Разобьем все стаканы на пары, кроме одного (это возможно т.к. n - нечётно)



первым ходом первый наполняет стакан без пары компотом. а далее играет стратегии второго при чётном n.

по тем же соображениям ~~первый~~ второй не может выиграть комбинацией КЛК в зоне „В" (где нет стакана без пары), покажем, что он не сможет выиграть комбинацией КЛК, если рядом стакан без пары



посмотрим на эту часть стола второй, (по аналогичным соображениям для $n:2$) „открывает" пары а первый наливает в ту же пару ту же жидкость.

посмотрим, когда второй открыл одну из этих пар (н.у.о левую) жидкость $\boxed{X}$. тогда после хода первого там стало $\boxed{X}\boxed{X}$ К (или же К$\boxed{X}\boxed{X}$, когда справа) этими ходами второй не может обеспечить себе КЛК (т.к. КЛ будут ~~этот~~ одним напитком)

(Он не мог выиграть, налив КЛК в соседние с стаканом без пары пары т.к. этот стакан К, а не Л)

а значит и здесь он не смог победить комбинацией. КЛК так же последний ход (игра конечна) ~~сделает первый~~ не сможет сделать второй (а это ~~последняя~~ вторая возможность выиграть) т.к. n - нечётно. Значит при такой стратегии второй не выигрывает => =>(игра конечна) выигрывает первый. Ответ: победа Пети при неч. n.

чистовик

Задача № 4

$$\begin{array}{r} КСИ \\ ИСК \\ \hline d_1\ c_1\ b_1\ a_1 \\ h_1\ g_1\ f_1\ e_1 \\ f_1\ e_1\ t_1\ s_1 \\ \hline \end{array}$$

По условию число шестизначное
значит f_1 больше 0

I $И \times К$ – однозначное число,

тогда f_1 может получится максимум 2
(десяток из t_1 и единица h_1) все это цифры => max $\cancel{2\cdot 9 = 27}$ $3\cdot 9 = 27$
(число)

Если И·К однозначное число, либо 1 либо 2, то
есть 3 варианта $\begin{cases} К=1 \\ И=1 \end{cases}$, $\begin{cases} К=2 \\ И=1 \end{cases}$, $\begin{cases} К=1 \\ И=2 \end{cases}$, заметим, что
последние два ~~цифры~~ случая аналогичны т.к. тогда КСИ и ИСК
просто меняются местами.

1 $К = И = 1$

$$\begin{array}{r} 1C1 \\ 1C1 \\ \hline 1C1 \\ c\ c^2\ c\ c \\ 1\ c\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Заметим, что наибольшее число, которое
возможно получить – это число, полученное
произведением 191×191

$$\begin{array}{r} 191 \\ \times 191 \\ \hline 191 \\ 1719 \\ 191 \\ \hline 36481 \end{array}$$

– 5-ти значное число

во втором и третьем случае максимум при
перемножении

$$\begin{array}{r} 291 \\ \times 192 \\ \hline 582 \\ 2619 \\ 291 \\ \hline 55872 \end{array}$$

5-ти значное число.

а по условию число 6 значное

т.о. $И \times К$ – двузначное число $И \times К = \overline{ab}$

(7)

Из условия $f_1 = a_1$. По предыдущему случаю добавить в
f можно максимум 2

(макс 9 из i, и мах 9 из h, все это + e_i) ≤ 27 ✓ a и b отличаются не больше чем на 2 (b > a)

1.О. $и \times k = \overline{a_4 b}$ где $a + k = b$; $k=0, k=1, k=2$

Выпишем все такие числа, полученные перемножением цифр (и и k)

$3 \times 4 = 12$
$3 \times 8 = 24$
$4 \times 6 = 24$ ← обратные не выписываем, т.к. просто поменяем местами число. а ответ не изменится
$5 \times 7 = 35$ ↖ только такие и и k могут дать правильный ответ
$5 \times 9 = 45$
$7 \times 8 = 56$

переберём все случаи и будем смотреть, где выполняется условие «и»

```
  304  (0)      314  (1)      324  (2)      334  (3)      344  (4)
x 403         x 413         x 423         x 433         x 443
  912           942           972          1002          1032
  000           314           648          1002          1376
 1216          1256          1296          1336          1376
122512        129682        137052        144622        152392

  354  (5)      364  (6)      374  (7)      384  (8)      394  (9)
x 453         x 463         x 473         x 483         x 493
 1062          1092          1122          1152          1182
 1770          2184          2618          3072          3546
 1416          1456          1496          1536          1576
160362        168532        176902        185472        194242
```

Сделаем разумнее
~~это~~ будем перемножать с 9-ки

```
  308           398  (9)
x 803         x 893
  924          1194
  000          3582
 2464          3184
247324        345414
```

уже это число помножается на тройку => при $c < 9$ число ~~меньше~~ получится ещё меньше

```
  496  (9)
x 694
 1984
 4464
 2976
344224
```

уже начинается с тройки => при $c < 9$ только меньше.
(проверять все меньшие нет смысла)

листовик (или продолжение 2)

9

597 × 795

2985
5373
4179

474615

уже получилось понижающееся с четвёрки => не подходит и все с < 9.

9

599 × 995

2995
5391
5381

595005

8

589 × 985

2945
4712
5301

580165

7

579 × 975

2895
4053
5211

564525

6

569 × 965

2845
3414
5121

549085

5

559 × 955

2795
2795
5031

533845

4

549 × 945

2745
2196
4941

518805

~~539~~
~~935~~

3

539 × 935

2695
1617
4851

503965

2

529 × 925

2645
1058
4761

489225

уже число 4 получена первым => c < 2 нет смысла рассматривать

9

897 × 798

7176
8073
6279

715806

8

887 × 788

7096
7096
6209

698956

7

877 × 778

7016
6139
6139

682406

6

867 × 768

6936
5202
6069

665856

5

857 × 758

6856
4285
5999

649606

4

$\boxed{847 \times 748 = 633556}$

5988
3388
5929

633556

9

листовик (продолжение 3)

продолжим дальше, может их 2

(3)

$$\begin{array}{r} \times\ 837 \\ 738 \\ \hline 6696 \\ 2511 \\ 5859 \\ \hline 617706 \end{array}$$

~~827~~

(2)

$$\begin{array}{r} \times\ 827 \\ 728 \\ \hline 6616 \\ 1654 \\ 5789 \\ \hline 602056 \end{array}$$

(1)

$$\begin{array}{r} \times\ 817 \\ 718 \\ \hline 6536 \\ 817 \\ 5719 \\ \hline 586606 \end{array}$$

не подходили потому => 0 можно не проверять

Т.О. подошло только одно число $847 \times 748 = 633556$

Ответ: 633556

10