80

ИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2864

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 18.03.2018

* *

Вариант 10

1. В таблице 3×4 расставлены 12 чисел так, что все семь сумм этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться нулю?

2. Даны числа $x, y, z \in [0, \pi]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x).$$

3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки Q и R соответственно. Прямая QR вторично пересекает описанную окружность треугольника ABR в точке P и вторично пересекает описанную окружность треугольника BCQ в точке S. Прямые AP и CS пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми KO и QR.

4. На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Это произведение шестизначное, его крайние цифры равны, а между ними находятся две пары одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?

5. По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них компот или лимонад. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан любым из двух напитков на свой выбор. Игрок, после чьего хода образовался стакан с лимонадом, у которого оба соседних стакана с компотом, выигрывает. Если игроку не досталось пустого стакана, то он проигрывает. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат два шара, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи, соединяющие вершину конуса с центрами шаров, образуют равные углы со столом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

① ответ: 8

Оценка: $\exists$ макс. один столбец с суммой 0 $\Rightarrow$ хотя бы в трёх столбцах есть число отличное от 0. Докажем, однако, что в таблице не могут быть ровно три ненулевых числа. Мы можем менять столбцы и строки, от этого сумма в них не изменится. У нас ровно три ненулевых числа $\Rightarrow$ у нас ровно один столбец с нулевой суммой ($\exists$ это будет первый столбец) $\Rightarrow$ у нас нет строк с нулевой суммой $\Rightarrow$ в каждой строке ровно по одному ненулевому числу, а также в трёх из четырёх столбцов ровно одно ненулевое число, тогда с точностью до перестановки строк и столбцов таблица выглядит так:

0	0	0	c
0	0	b	0
0	a	0	0

$a, b, c \neq 0$, но тогда в первой строке $\Sigma = c$ и в 4ом столбце $\Sigma = c$, противоречие.

$\Rightarrow$ у нас хотя бы 4 ненулевых числа $\Rightarrow$ нулей максимум 8.

✓

②

$x, y, z \in [0, \pi]$

$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$

$(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0 \Rightarrow$ одно из чисел $x-y,\ y-z,\ z-x \leq 0$

$\Rightarrow \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x) \leq 1+1+0 = 2$ ($\sin(\alpha) \leq 0$ при $-\pi \leq \alpha \leq 0$)

$-\pi \leq x-y,\ y-z,\ z-x$

$\Rightarrow$ одно из чисел $x-y,\ y-z,\ z-x$ лежит в $[-\pi, 0]$

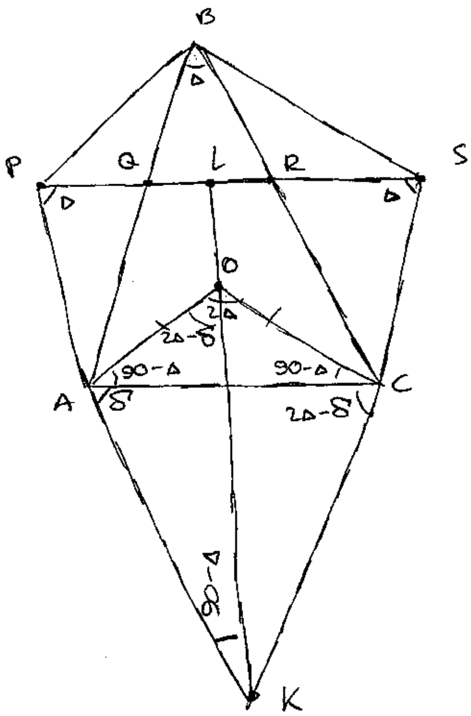
Пример:

$x = \pi \quad y = \frac{\pi}{2} \quad z = 0$

$\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(-\pi) = 2$

✓

③



$\angle APQ = \angle ABR = \Delta$, т.к. $APBR$ − вп.

$\angle QBC = \angle QSC = \Delta$, т.к. $QBSC$ − вп.

$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\Delta$

$AO = OC$

$\triangle AOC$ − р/б $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA = 90 - \Delta$

$\angle PKS = 180 - \angle SPK - \angle PSK = 180 - 2\Delta$

$\Rightarrow AOCK$ − вп.

$\Rightarrow \angle KAO + \angle OCK = 180$

$\exists\ \angle KAC = \delta \Rightarrow$

$\delta + 90 - \Delta + 90 - \Delta + \angle ACK = 180$

$\angle ACK = 2\Delta - \delta$

$\angle AOK = \angle ACK$, т.к. $AOCK$ − вп

$\angle AOK = 2\Delta - \delta \Rightarrow \angle AKO = 90 - \Delta$

$\Rightarrow \angle PLK = 90 \Rightarrow KO \perp QR$

✓

⑤

Разберём два случая $n \vdots 2$, $n \not\vdots 2$. (переформулируем задачу игроки красят точки в цвета 1, 2. 1 − сок, 2 − лимонад)

1) $n \vdots 2$ 2ой выигрывает $\Rightarrow$ тройка 121 − выигрышная.

~~если второй будет красить~~
если первый покрасил точку => второй будет красить диаметрально противоп. в тот же цвет. Но если после хода первого ∃ выигрышный ход, то мы его делаем. Докажем, что после ходов второго у первого не будет выигр. хода. ∃ такой ход есть, тогда он включает в себя только что закрашенную вторым клетку, если не включает и ∃ другой выигрышный ход, то его мог сделать второй еще на прошлом ходу. => выигрышный ход 1ого включает только что закрашенную клетку, но тогда если рассмотреть диаметрально против. точки, тем что дают выигр. комбинацию первому, то второй мог сделать выигрышный ход раньше, а именно тот диаметр. против. ход тому, что сейчас собирается сделать первый. (если второй не проиграет, ходы закончатся, то они закончатся на 1ом, т.к. $n \vdots 2$)

2) $n \not\vdots 2$ 1ый выиграет

Стратегия:

если второй ставит 2, тогда первый ставит 2 в одну из соседних позиций, если такие есть, иначе он ставит 1, потом скажу куда. (комментарий: если у 1ого есть выигрышный ход, то он его сразу делает) Таким образом, после хода 1ого у всех двоек есть сосед, причём если один из соседей 2, то на данной двойке нельзя сделать выигрышную тройку, а если оба соседа 1, то эту выигрышную тройку сделали мы, сейчас объясню стратегию по кот. после нашего хода не будет выигр. хода у 2ого. Заметим, что если у второго будет выигр. ход, то это ①○①

поставить 2 между двумя 1,

т.к. мы выяснили, что нет тройки из подряд идущих точек, т.ч. одна из них 2 и 2ой может доделать эту тройку до выигрышной. Теперь поймём, как нам избежать такой картины: ①○①. Если есть кусок из m подряд непокрашенных точек $m \neq 2$, то мы красим в 1 крайнюю из этих точек (это если мы не делаем другой ход, ходы по приоритетности: выигр. ход, если 2ой поставил 2 и этой двойки есть свободный сосед, то ставим в свободного соседа 2, иначе делаем тот ход, кот. я сейчас описываю) => тройка ①○① не образуется, если же $m=2$: ⓐ○○ⓑ, то если $a \neq 1$, то ставим во 1ую пустую 1, если $b \neq 1$, то ставим в 1ую пустую 1, а если $a=1, b=1$: ①○○①, то любой ход, сделанный в одну из этих пустых клеток, даёт сразу выигр. ход сопернику => мы в эти клетки ходить не будем, если второй походит, то мы победим, если нет, то можно эти клетки выкинуть из игры. т.к. $n \not\vdots 2$, то если ходы и закончатся, то на ходе второго.

Чистовик

④

$\overline{кси} \times \overline{иск} = \overline{abbdda}$

$\overline{abbdda} = a(10^5+1) + b(10^4+10^3) + d(10^2+10) = a(10^5+1) + b \cdot 10^3 \cdot 11 + d \cdot 10 \cdot 11$

$10^5 + 1 \equiv (-1)^5 + 1 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow \overline{abbdda} \,\vdots\, 11$

$\Rightarrow \overline{кси} \times \overline{иск} \,\vdots\, 11$

$\overline{иск} = и \cdot 10^2 + c \cdot 10 + к \equiv к - c + и \pmod{11}$

$\overline{кси} = к \cdot 10^2 + c \cdot 10 + и \equiv и - c + к \pmod{11}$

$\Rightarrow \overline{иск} \equiv \overline{кси} \equiv 0 \pmod{11}$

$\Rightarrow$ $c = к + и$

$и + к = c \le 9$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} и \le 4 \\ к \le 4 \end{array}\right.$ НУО: $и \le 4$ ($и, к$ входят в ур-е симметрично)

$и, к \ne 0$, переберём $и = 1$ $к = 1, \ldots, 8$ | $и = 2$ $к = 1, \ldots, 7$ | $и = 3$ $к = 1, \ldots 6$ | $и = 4$ $к = 1, \ldots 5$

c, но $к$ и $и$ определяется ($c = и + к$)

т.е. нам нужно перебрать $8+7+6+5 = 26$ вариантов $\overline{иск}$)

Вот они: (я не буду писать варианты, где какие-то из к, и, с совпадают, так что вариантов будет меньше 26)

132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 231, 253, 264, 275, 286, 297, 341, 352, 374, 385, 396, 451, 462, 473, 495. Напишем для них произведения $\overline{иск} \times \overline{кси}$:

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times\, 231 \\ \hline 132 \\ 396 \\ 264 \\ \hline 30492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 143 \\ \times\, 341 \\ \hline 143 \\ 572 \\ 429 \\ \hline 48763 \end{array} \quad \begin{array}{r} 154 \\ \times\, 451 \\ \hline 154 \\ 770 \\ 616 \\ \hline 69454 \end{array} \quad \begin{array}{r} 165 \\ \times\, 561 \\ \hline 165 \\ 990 \\ 825 \\ \hline 92565 \end{array} \quad \begin{array}{r} 176 \\ \times\, 671 \\ \hline 176 \\ 1232 \\ 1056 \\ \hline 118096 \end{array} \quad \begin{array}{r} 187 \\ \times\, 781 \\ \hline 187 \\ 1496 \\ 1309 \\ \hline 146047 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times\, 891 \\ \hline 198 \\ 1782 \\ 1584 \\ \hline 176418 \end{array} \quad \begin{array}{r} 231 \\ \times\, 132 \\ \hline 462 \\ 693 \\ 231 \\ \hline 30492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 253 \\ \times\, 352 \\ \hline 506 \\ 1265 \\ 759 \\ \hline 89056 \end{array} \quad \begin{array}{r} 264 \\ \times\, 462 \\ \hline 528 \\ 1584 \\ 1056 \\ \hline 121968 \end{array} \quad \begin{array}{r} 275 \\ \times\, 572 \\ \hline 550 \\ 1925 \\ 1375 \\ \hline 157300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 286 \\ \times\, 682 \\ \hline 572 \\ 2288 \\ 1716 \\ \hline 195052 \end{array} \quad \begin{array}{r} 297 \\ \times\, 792 \\ \hline 594 \\ 2673 \\ 2079 \\ \hline 235224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 374 \\ \times\, 473 \\ \hline 1122 \\ 2618 \\ 1496 \\ \hline 176902 \end{array} \quad \begin{array}{r} 385 \\ \times\, 583 \\ \hline 1155 \\ 3080 \\ 1925 \\ \hline 224455 \end{array} \quad \begin{array}{r} 396 \\ \times\, 693 \\ \hline 1188 \\ 3564 \\ 2376 \\ \hline 274428 \end{array} \quad \begin{array}{r} 495 \\ \times\, 594 \\ \hline 1980 \\ 4455 \\ 2475 \\ \hline 294030 \end{array}$$

341, 352, 451, 462, 473 я не разбирал, т.к. произведение будет тоже, что и в случаях: 143, 253, 154, 264, 374 соответственно

2) таких чисел нет