САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

576

80

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Челябинск

Дата 05 марта 2018

* *

Вариант 3

1. Каждая клетка таблицы 5×6 окрашена в один из трех цветов: синий, красный или жёлтый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа жёлтых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа жёлтых клеток. Сколько жёлтых клеток может быть в такой таблице? Приведите пример соответствующей раскраски.

2. Даны числа $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{\cos x \cos y}}{\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} y}}.$$

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, центр которой лежит на стороне AB. Окружность ω_1 касается внешним образом окружности ω в точке C. Окружность ω_2 касается окружностей ω и ω_1 в точках D и E соответственно. Прямая BC вторично пересекает окружность ω_1 в точке P, а прямая AD вторично пересекает окружность ω_2 в точке Q. Известно, что точки P, Q и E различны. Найдите угол PEQ.

4. На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Запись этого произведения состоит из трех пар одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?

5. По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них квас. Петя в свой ход наливает квас в выбранный им пустой стакан, у которого оба соседних с ним стакана либо пустые, либо полные. Вася в свой ход наливает квас в выбранный им пустой стакан, у которого один соседний с ним стакан пустой, другой — полный. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат шары радиусов 2, 2, 1, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса находится посередине между точками касания одинаковых шаров со столом, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№1.
В таблице 5×6 5 строк и 6 столбцов => 6 клеток в строке, 5 клеток в столбце
Если в каком-то столбце меньше 2 синих клеток, в нем хотя бы 2 ж. или к. =>
=> противоречие, тогда в каждом столбце ≥2 с. клеток => всего ≥12 $C_{общ.}$ клеток.
Если к. клеток будет больше 12, в каком-то столбце будет хотя бы 3
к. клетки => в этом столбце $K > C$ клеток, противоречие => всего ≤ 12 $K_{общ.}$ клеток.
Т.к. в любой строчке к клеток ≥ с клеток, суммарно в 5 строчках $K_{клеток} \geq C_{клеток}$

$$\begin{cases} K_{общ.} \geq C_{общ.} \\ C_{общ.} \geq 12 \geq K_{общ.} \end{cases} \Rightarrow K_{общ.} = C_{общ.} = 12 \Rightarrow Ж_{общ.} = 6$$

Пример:

2	2	2	1	1	1
2	2	2	1	1	1
1	1	3	2	2	3
1	3	1	2	3	2
3	1	1	3	2	2

1 — красные
2 — синие
3 — желтые

№2.
$x, y \in (0; \frac{\pi}{2})$

$$A = \frac{\sqrt{\cos x \cos y}}{\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} y}}, \quad \underset{\text{при любых допустимых } x;y}{A > 0} \Rightarrow \frac{1}{A} > 0; \quad A \cdot \frac{1}{A} = 1 = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \text{ максимально когда } \left(\frac{1}{A}\right) \text{ минимально } (\text{т.к. } A > 0, \frac{1}{A} > 0)$$

$$\frac{1}{A} = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} y}}{\sqrt{\cos x \cdot \cos y}} = \frac{\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}}{\sqrt{\cos x \cdot \cos y}} + \frac{\sqrt{\frac{\cos y}{\sin y}}}{\sqrt{\cos x \cdot \cos y}} \left(y; x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{matrix} \sin x > 0 \\ \sin y > 0 \\ \cos x > 0 \\ \cos y > 0 \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos y}} + \frac{1}{\sqrt{\sin y \cos x}}; \quad \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos y}} = a, \quad \frac{1}{\sqrt{\sin y \cos x}} = b, \quad a > 0, b > 0$$

Тогда $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ по нерав. о средних для $a > 0, b > 0$

$$ab = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x \sin y \cos y}} = \frac{2}{\sqrt{\sin 2x \cdot \sin 2y}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin 2x \cdot \sin 2y}} -$$

$$- \text{ т.к. } 0 < \sin 2x \cdot \sin 2y \leq 1, \ \frac{1}{\sqrt{\sin 2x \sin 2y}} \geq 1 \Rightarrow ab \geq 2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow A \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}. \ A \text{ принимает значение } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ при } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Ответ: $A_{макс.} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

№4.

$\overline{ИСК} \times \overline{КСИ} = \overline{aabbcc}$; $\overline{aabbcc} \vdots 11$ т.к. $\overline{a0b0c} \cdot 11 = \overline{aabbcc}$. Тогда $\left[\begin{array}{l}\overline{ИСК} \vdots 11 \\ \overline{КСИ} \vdots 11\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(И+К)-С \vdots 11 \\ (И+К)-С \vdots 11\end{array}\right.$, но $0 \le C \le 9$, тогда

$\left[\begin{array}{l}И+К=С+11 \\ И+К=С\end{array}\right.$. Пусть $И+К=С$. Заметим, что тогда $\overline{ИСК} \vdots 11$ и $\overline{КСИ} \vdots 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{aabbcc} \vdots 121 \Rightarrow \overline{a0b0c} \vdots 11 \Rightarrow (a+b+c-2\cdot 0) \vdots 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b+c \vdots 11$; $0 < a+b+c \le 27 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+b+c=11 \\ a+b+c=22\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2(a+b+c)=22 \\ 2(a+b+c)=44\end{array}\right. \Rightarrow$ сумма цифр

$\overline{aabbcc}$ не делится на 3 $\Rightarrow \overline{aabbcc}$ не делится на 3 $\Rightarrow \overline{ИСК}$ и $\overline{КСИ}$ не делятся на 3

Тогда $И+С+К = 2(И+К) \not\vdots\, 3 \Rightarrow И+К \not\vdots\, 3$

$И+К = 8, 7, 5, 4$; (т.к. $И \ge 1$, $К \ge 1$ и $И \ne К$)

Возможные варианты для $\overline{ИСК}$ (пусть $И>К$ не умаляя общности): 781, 682, 583; 671, 572, 473; 352; 341.

$\overline{ИСК} \cdot \overline{КСИ} = \underbrace{И\cdot К + 10\cdot(И+К)\cdot С}_{} + 100\cdot\ldots + \ldots$, тогда $И\cdot К$ и $(И+К)\cdot С$ + с возможным переходом десятков от $К\cdot И$ оканч. на одну цифру. ($С=И+К$)

для $И+К=С=8$: $7\cdot 1 \not\equiv_{10} 8^2 \Rightarrow$ 781 не подходит; $6\cdot 2 \not\equiv_{10} 8^2+1 \Rightarrow$ 682 не подходит; $5\cdot 3 \equiv_{10} 8^2+1$

для $И+К=С=7$: $6\cdot 1 \not\equiv_{10} 7^2 \Rightarrow$ 671; $5\cdot 2 \equiv_{10} 7^2+1$; $4\cdot 3 \not\equiv_{10} 7^2+1$

для $И+К=С=5$: $3\cdot 2 \not\equiv_{10} 5^2$ (352); для $И+К=С=4$: $3\cdot 1 \not\equiv_{10} 4^2$ (341). Тогда оставим 583 и 572

Проверим:

$$\begin{array}{r} 583 \\ \times\ 385 \\ \hline 2915 \\ 4664\ \\ 1749\ \ \\ \hline 224455 \end{array} \Rightarrow \text{подходит} \qquad \begin{array}{r} 572 \\ \times\ 275 \\ \hline 2860 \\ 4004\ \\ 1144\ \ \\ \hline 157300 \end{array} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Пусть $И+К=С+11$, тогда $\overline{ИСК} \vdots 11$ и $\overline{КСИ} \vdots 11 \Rightarrow \overline{a0b0c} \vdots 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a+b+c=11 \\ a+b+c=22\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{aabbcc} \not\vdots\, 3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{ИСК} \not\vdots\, 3 \\ \overline{КСИ} \not\vdots\, 3\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l}И+К \not\vdots\, 3 \\ С+11 \not\vdots\, 3\end{array} \Rightarrow C \overset{\bmod 3}{\not\equiv} 1$; $И+К \le 17 \Rightarrow C \le 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 0, 2, 3, 5, 6 \Rightarrow$ возможные $\overline{ИСК}$ (пусть $И>К$):

605, 704, 803, 902; 726, 825, 924; 836, 935; 957; 968; $605\cdot 506$ оканч на 30, $704\cdot 407$ — на 28, $803\cdot 308$ — на 24, $902\cdot 209$ — на 18 $\Rightarrow$ не подходят

$$\begin{array}{r} 726 \\ \times\ 627 \\ \hline 82 \\ 2\ \\ \hline \ldots 02 \end{array} \quad \begin{array}{r} 825 \\ \times\ 528 \\ \hline 6600 \\ 1650\ \\ 4125\ \ \\ \hline 435600 \end{array} \quad \begin{array}{r} 924 \\ \times\ 429 \\ \hline 16 \\ 8\ \\ \hline \ldots 96 \end{array} \quad \begin{array}{r} 836 \\ \times\ 638 \\ \hline 88 \\ 8\ \\ \hline \ldots 68 \end{array} \quad \begin{array}{r} 935 \\ \times\ 539 \\ \hline 15 \\ 5\ \\ \hline \ldots 65 \end{array} \quad \begin{array}{r} 957 \\ \times\ 759 \\ \hline 13 \\ 5\ \\ \hline \ldots 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 968 \\ \times\ 869 \\ \hline 12 \\ 8\ \\ \hline \ldots 92 \end{array}$$

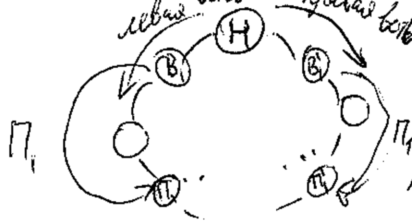
не подходит; 435600 — не подходит; ...96 — не подходит; ...68 не подходит; ...65 не подходит; ...63 не подходит; ...92 не подходит

Тогда единств. подходящая пара 583 и 385. На доске 224455

Ответ: 224455

№5.

Обозначим первый ход Пети за начальный как (Н);

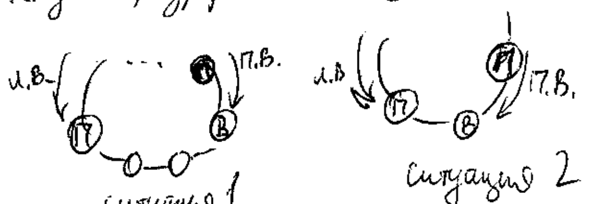


Будем ходить след. образом.

Заметим, что сначала В ставит квас в B_1 или в B_1', т.е. слева или справа от Н. П ходит через один стакан против часовой стрелки если ход B_1 (ход $П_1$) и через один стакан по часовой, если ход B_1' (ход $П_1'$)

Если ход П был через стакан против часовой, это "левая ветвь", если по часовой — "правая ветвь". Ветвь считается от (Н). Тогда каждая ветвь выходит так:

Тогда пока П может так ходить, обе ветви оканчиваются на его ход. Пусть П не смог так сходить после хода В. Тогда одна из ветвей оканч. на ход П, другая на ход В:



Если между (П) и (В) один пустой стакан, ходим в него. (стрелки идут от (Н))

Заметим также, что внутри "ветви" В не может делать ход (все стаканы или полные, или соседи оба полные)

В ситуации 2 у П было более 1 хода => хотя бы 1 раз П сходил через стакан, оставив его соседей полными => ходит туда, у В нет ходов.

(более 1 хода было т.к. стаканов > 2)

В ситуации 1 если отмеченные как П стаканы на рисунке не совпадают, было > 1 хода => хотя бы 1 раз П сходил через стакан, оставив его соседей полными => П ходит в него, В ходит в один из пустых на рисунке стаканов (т.е. в стаканы на лев. ветви и прав. ветви ходить не может) => появляется еще один ход у П, он ходит туда.

Если в с. 1 отмеченные стаканы совпадают, было 4 стакана и сейчас первый после начального ход П, т.е. такая ситуация возникает всегда при $n=4$, и хода П уже нет.

Тогда П побеждает при всех $n \geq 3$, $n \neq 4$

Ответ: n — любое кроме 4