

$$\begin{array}{r} 11. \quad 1 \quad \square \quad 6 \\ \cdot \quad \square \quad 6 \quad 1 \\ \hline \quad 1 \quad \square \quad 6 \\ \dots \quad 6 \\ \hline \dots \\ \dots \quad 6 \quad \square \quad 6 \end{array}$$

a)  $6 + \square = 0 \Rightarrow \square = 4$   
 $\begin{array}{r} 146 \\ \times 461 \\ \hline < 100000 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 б)  $6 + \square = 6 \Rightarrow \square = 0 \Rightarrow \text{не подходит по условию}$   
 в)  $6 + \square = \square + \dots \Rightarrow 6 = \dots, \text{ где } \dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow \square \in \emptyset$

$$\begin{array}{r} 12. \quad 1 \quad \square \quad 7 \\ \cdot \quad \square \quad 7 \quad 1 \\ \hline \quad 1 \quad \square \quad 7 \\ \dots \quad 9 \\ \hline \dots \\ \dots \quad 9 \quad \square \quad 7 \end{array}$$

a)  $9 + \square = 0 \Rightarrow \square = 1 \Rightarrow \square = \square \Rightarrow \text{не подходит}$   
 б)  $9 + \square = 7 \Rightarrow \square = 8 \Rightarrow \begin{array}{r} 187 \\ \times 871 \\ \hline 162877 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 в)  $9 + \square = \square + \dots \Rightarrow 9 = \dots, \text{ где } \dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow \square \in \emptyset$

$$\begin{array}{r} 13. \quad 1 \quad \square \quad 8 \\ \cdot \quad \square \quad 8 \quad 1 \\ \hline \quad 1 \quad \square \quad 8 \\ \dots \quad 4 \\ \hline \dots \\ \dots \quad 4 \quad \square \quad 8 \end{array}$$

a)  $4 + \square = 0 \Rightarrow \square = 6 \Rightarrow \begin{array}{r} 168 \\ \times 681 \\ \hline 114408 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 б)  $4 + \square = 8 \Rightarrow \square = 4 \Rightarrow \begin{array}{r} 148 \\ \times 481 \\ \hline < 100000 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 в)  $4 + \square = \square + \dots \Rightarrow 4 = \dots, \text{ где } \dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow \square \in \emptyset$

$$\begin{array}{r} 14. \quad 6 \quad \square \quad 8 \\ \cdot \quad \square \quad 8 \quad 6 \\ \hline \dots \quad 6 \quad \square \quad 8 \\ \dots \quad 4 \\ \hline \dots \\ \dots \quad 6 \quad \square \quad 8 \end{array}$$

a)  $6 \square + 8 = 0 \Rightarrow \square = 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 628 \\ \times 286 \\ \hline 179608 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 $\square = 7 \Rightarrow \begin{array}{r} 678 \\ \times 786 \\ \hline 532908 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 б)  $6 \square + 8 = 8 \Rightarrow \square = 0 \Rightarrow \text{не подходит по условию}$   
 в)  $6 \square + 8 = \square + \dots \Rightarrow 5 \square = \dots \Rightarrow \square \in \emptyset$

$$\begin{array}{r} 15. \quad 1 \quad \square \quad 9 \\ \cdot \quad \square \quad 9 \quad 1 \\ \hline \quad 1 \quad \square \quad 9 \\ \dots \quad 1 \\ \hline \dots \\ \dots \quad 1 \quad \square \quad 9 \end{array}$$

a)  $1 + \square = 0 \Rightarrow \square = 9 \Rightarrow \square = \square \Rightarrow \text{не подходит по условию}$   
 б)  $1 + \square = 9 \Rightarrow \square = 8 \Rightarrow \begin{array}{r} 189 \\ \times 891 \\ \hline 168399 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$   
 в)  $1 + \square = \square + \dots \Rightarrow \dots = 1, \text{ где } \dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow \square \in \emptyset$

Итого мы разобрали все возможные варианты. Из них подходит только один: ИКС = 632

Ответ: 632 ✓

+1 мес Выход: 14<sup>00</sup> - 14<sup>04</sup>

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



5915

70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА  
 ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ  
 2017-2018  
 заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 11.03.2018

\*\*\*\*\*

Вариант 2

1. На клетчатой доске  $7 \times 7$  отмечено 14 клеток. Назовем пару клеток с общей стороной *интересной*, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество интересных пар может быть?

2. Даны положительные числа  $a, b, c, d$ . Найдите минимальное значение выражения

$$A = \left(\frac{a^2 + b^2}{cd}\right)^4 + \left(\frac{b^2 + c^2}{ad}\right)^4 + \left(\frac{c^2 + d^2}{ab}\right)^4 + \left(\frac{d^2 + a^2}{bc}\right)^4$$

3. Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\omega$ . Касательные к окружности, проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $K$ . Точка  $M$  — середина стороны  $AC$ . Прямая, проходящая через точку  $K$  параллельно  $AC$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $L$ . Найдите угол  $AML$ .

4. На доске написано произведение чисел  $\overline{IKC}$  и  $\overline{КСИ}$ , где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение шестизначное и оканчивается не на ноль. Петя стер с доски все нули и одну цифру  $C$ , после чего там осталось ИКС. Что было написано на доске?

5. На окружности отмечено  $n$  точек ( $n \geq 5$ ). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек, не являющихся соседними. Любые две проведенные хорды могут пересекаться только концевыми точками. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких  $n$  Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе находятся три шара и конус (основанием к столу), касаясь друг друга внешним образом. Радиусы шаров равны 20, 40 и 40, а радиус основания конуса равен 21. Найдите высоту конуса.



Заметим, что так как  $\overline{UKC} \times \overline{KCU}$  заканчивается не на ноль, оно заканчивается на С. Иначе, сумма только 0 и С тоже не может быть поделена на  $\overline{UKC}$  на доске. Тогда  $C \cdot U = \dots C$ . Рассмотрим все такие варианты:

C	U
1	*
2	1,6
3	1
4	1,6,7
5	1,3,7,9
6	1,8
7	1
8	1,6
9	1

Вычеркнем все варианты, где  $C=U$ , т.к. по условию они нечетные и различные.

Разберем все варианты.

$$\begin{array}{r} 1 \cdot \quad 1 \quad 2 \\ \times \quad \underline{2 \quad 1} \\ \hline 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \end{array}$$

Предпоследняя цифра числа, четвёртая, либо 0, либо С, либо  $K=U$ . Д.е.:

a)  $4+U=0 \Rightarrow U=6$

$$\begin{array}{r} 162 \\ \times 621 \\ \hline 101602 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

б)  $4+U=2 \Rightarrow U=8$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 821 \\ \hline 14942 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

в)  $4+U = \dots + U \Rightarrow 4 = \dots$ , где  $\dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow U \in \emptyset$

2.  $6 \quad 2$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 2 \\ \times \quad \underline{2 \quad 6} \\ \hline 36 \quad 6 \quad 2 \quad 2 \\ 12 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 6 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 6 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \end{array}$$

a)  $5+6U=0 \Rightarrow U=\emptyset$   
 б)  $5+6U = \dots + U \Rightarrow U \in \{1,3,5,7,9\}$

$\begin{array}{r} 612 \\ \times 126 \\ \hline 77112 \end{array}$	$\begin{array}{r} 632 \\ \times 326 \\ \hline 206032 \end{array}$	$\begin{array}{r} 652 \\ \times 526 \\ \hline 341352 \end{array}$	$\begin{array}{r} 672 \\ \times 726 \\ \hline 487872 \end{array}$	$\begin{array}{r} 692 \\ \times 926 \\ \hline 640792 \end{array}$
↓ не подходит	↓ подходит	↓ не подходит	↓ не подходит	↓ не подходит

3.  $1 \quad 3$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \\ \times \quad \underline{3 \quad 1} \\ \hline 1 \quad 3 \\ 3 \quad 3 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 9 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

a)  $9+U=0 \Rightarrow U=1$

$$\begin{array}{r} 113 \\ \times 131 \\ \hline <100000 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

б)  $9+U = \dots + U \Rightarrow 9 = \dots$ , где  $\dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow U \in \emptyset$

4.  $1 \quad 4$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \\ \times \quad \underline{4 \quad 1} \\ \hline 1 \quad 4 \\ 4 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \\ 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \end{array}$$

a)  $6+U=0 \Rightarrow U=4$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 441 \\ \hline 154744 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

б)  $6+U = \dots + U \Rightarrow 6 = \dots$ , где  $\dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow U \in \emptyset$

5.  $6 \quad 4$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \\ \times \quad \underline{4 \quad 6} \\ \hline 36 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \\ 24 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \\ \dots 8+6 \quad 4 \end{array}$$

6.  $7 \quad 4$

$$\begin{array}{r} 7 \quad 4 \\ \times \quad \underline{4 \quad 7} \\ \hline 7 \quad 4 \quad 2 \quad 8 \\ 6 \\ \hline \dots 8+7 \quad 4 \end{array}$$

7.  $1 \quad 5$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ \times \quad \underline{5 \quad 1} \\ \hline 1 \quad 5 \\ 5 \\ \hline \dots 5+1 \quad 5 \end{array}$$

8.  $3 \quad 5$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 5 \\ \times \quad \underline{5 \quad 3} \\ \hline 9 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ 5 \\ \hline \dots 6+3 \quad 5 \end{array}$$

9.  $7 \quad 5$

$$\begin{array}{r} 7 \quad 5 \\ \times \quad \underline{5 \quad 7} \\ \hline 7 \quad 5 \quad 5 \\ 5 \\ \hline \dots 8+7 \quad 5 \end{array}$$

10.  $9 \quad 5$

$$\begin{array}{r} 9 \quad 5 \\ \times \quad \underline{5 \quad 9} \\ \hline 9 \quad 5 \quad 5 \\ 5 \\ \hline \dots 9+9 \quad 5 \end{array}$$

a)  $8+6U=0 \Rightarrow U=2$

$$\begin{array}{r} 624 \\ \times 246 \\ \hline 155504 \end{array}$$

не подходит

б)  $8+6U=4 \Rightarrow U=6 \Rightarrow U=K \Rightarrow \text{не подходит}$   
 $U=1 \Rightarrow 614 \times 146 < 100000 \Rightarrow \text{не подходит}$

a)  $7U+8=0 \Rightarrow U=6$

$$\begin{array}{r} 674 \\ \times 746 \\ \hline 502804 \end{array}$$

не подходит

б)  $8+6U = U + \dots \Rightarrow U \in \emptyset$

a)  $7U+8=0 \Rightarrow U=6$

$$\begin{array}{r} 764 \\ \times 647 \\ \hline 494308 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

б)  $7U+8=4 \Rightarrow U=8$

$$\begin{array}{r} 784 \\ \times 847 \\ \hline 661098 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

в)  $8+7U = U + \dots \Rightarrow U=2$

$$\begin{array}{r} 724 \\ \times 247 \\ \hline 178828 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

$K=U \Rightarrow \text{не подходит}$

a)  $5+U=0 \Rightarrow U=5 \Rightarrow K=C \Rightarrow \text{не подходит}$   
 б)  $5+U=5 \Rightarrow U=0 \Rightarrow \text{не подходит по условию}$   
 в)  $5+U = U + \dots \Rightarrow 5 = \dots$ , где  $\dots = 10/20/30 \dots \Rightarrow \text{не подходит}$

a)  $6+3U=0 \Rightarrow U=8$

$$\begin{array}{r} 385 \\ \times 853 \\ \hline 318405 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

б)  $6+3U=5 \Rightarrow U=3$

$$\begin{array}{r} 325 \\ \times 253 \\ \hline 82225 < 100000 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

в)  $6+3U = U + \dots \Rightarrow U=2$

$$\begin{array}{r} 375 \\ \times 753 \\ \hline 282375 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

a)  $8+7U=0 \Rightarrow U=6$

$$\begin{array}{r} 765 \\ \times 657 \\ \hline 502605 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

б)  $8+7U=5 \Rightarrow U=1$

$$\begin{array}{r} 715 \\ \times 157 \\ \hline 112255 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

в)  $8+7U = U + \dots \Rightarrow U=2$

$$\begin{array}{r} 725 \\ \times 257 \\ \hline 187325 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

$K=U \Rightarrow \text{не подходит}$

a)  $9+9U=0 \Rightarrow U=9 \Rightarrow U=K \Rightarrow \text{не подходит}$   
 б)  $9+9U=5 \Rightarrow U=4$

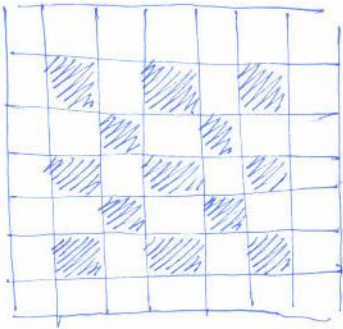
$$\begin{array}{r} 945 \\ \times 459 \\ \hline 433755 \Rightarrow \text{не подходит} \end{array}$$

в)  $9+9U = U + \dots \Rightarrow 8U = \dots 1 \Rightarrow U \in \emptyset$



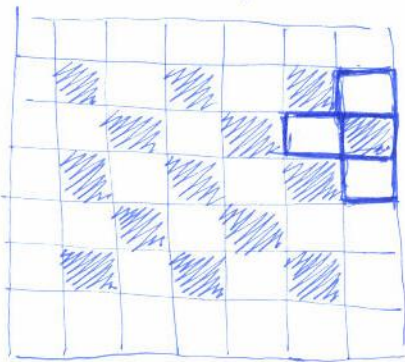
1. Заметим, что если отметить одну клетку, может прибавиться максимум 4 интересных пары (т.к. у клетки всего 4 стороны). Практически это происходит лишь в том случае, если соседние её клетки не отмечены (иначе две эти клетки уже и так были интересной парой), а также если новая отмеченная клетка не располагается на границе квадрата или в его углу.

Можно легко отметить 13 клеток так, чтобы они давали каждая по 4 (по максимуму) интересных пары:



Заметим, что невозможно так отметить 14 клеток, поскольку они должны располагаться в шахматном порядке (иначе интересные пары будут перекрывать друг друга), а также должна оставаться хотя бы одна клетка до границы квадрата. В случае указанного квадрата  $7 \times 7$ , остаётся в итоге квадрат  $5 \times 5$ , внутри которого невозможно в шахматном порядке отметить больше 13 клеток.

Таким образом, четырнадцатая клетка не может давать больше трёх интересных пар. Покажем, как она может добавить три интересные пары:



Все клетки, дающие с четырнадцатой интересные пары, выделены.

Итого интересных пар:  $13 \cdot 4 + 3 = 55$

Ответ: 55 интересных пар. ✓



$$2. A = \left(\frac{a^2+b^2}{cd}\right)^4 + \left(\frac{b^2+c^2}{ad}\right)^4 + \left(\frac{c^2+d^2}{ab}\right)^4 + \left(\frac{d^2+a^2}{bc}\right)^4$$

Используем неравенство о среднем:  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ , т.к.

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Для этого если вместо  $b$  подставим  $\frac{1}{a}$ , получаем:  $a + \frac{1}{a} \geq 2$

$$\text{Тогда: } A \geq \left(\frac{2ab}{cd}\right)^4 + \left(\frac{2bc}{ad}\right)^4 + \left(\frac{2cd}{ab}\right)^4 + \left(\frac{2ad}{bc}\right)^4 = 2^4 \left( \frac{a^4b^4}{c^4d^4} + \frac{c^4d^4}{a^4b^4} + \frac{b^4c^4}{a^4d^4} + \frac{a^4d^4}{b^4c^4} \right) \geq 2^4 \cdot (2+2) = 2^4 \cdot 4 = 2^6 = 64$$

(т.к.  $\frac{a^4b^4}{c^4d^4}$  и  $\frac{c^4d^4}{a^4b^4}$  — обратные числа и  $\frac{b^4c^4}{a^4d^4} + \frac{a^4d^4}{b^4c^4}$  — обратные числа)

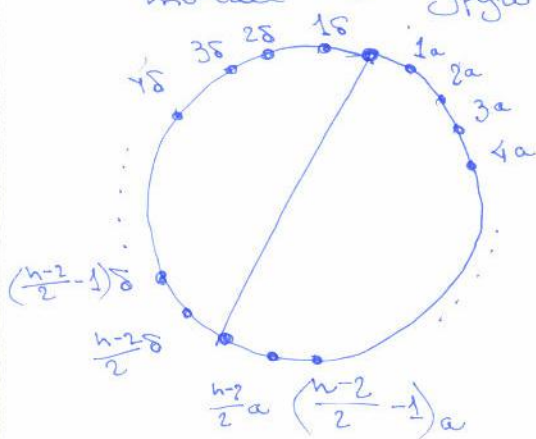
Умова:  $A \geq 64 \Rightarrow 64$  — минимальное значение, которое достигается при  $a=b=c=d$ . Покажем это, подставив, к примеру,

$$a=b=c=d=1:$$

$$A = \left(\frac{1+1}{1}\right)^4 + \left(\frac{1+1}{1}\right)^4 + \left(\frac{1+1}{1}\right)^4 + \left(\frac{1+1}{1}\right)^4 = 4 \cdot 2^4 = 64$$

Ответ: 64 ✓

5. В случае, если на окружности  $n$  точек, Петя может впервые ходом разбить круг пополам, соединив две точки так, чтобы в одной части осталось  $\frac{n-2}{2}$  точек и во второй столько же. Если эти части будут абсолютно симметричны, и если Вася совершает ход, соединяя две какие-то точки, Петя сможет просто соединить те же точки в другой половине. Указ:



Если Вася соединит точки  $i_b$  и  $k_b$ , Петя в свой ход соединит  $i_a$  и  $k_a$ . Таким образом, симметрия всегда будет оставаться и если Вася сможет соединить две точки в одной половине, Петя сможет сделать то же самое в другой.

Таким образом, если Вася сделал ход, не может случиться такого, что Петя сделать ход не сможет  $\Rightarrow$  Петя выигрывает.

а при нечетных  $n$  ?