8251

ІЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Стерлитамак

Дата 22.03.2018

* *

Вариант 2

1. На клетчатой доске 7×7 отмечено 14 клеток. Назовем пару клеток с общей стороной *интересной*, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество интересных пар может быть?

2. Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \left(\frac{a^2+b^2}{cd}\right)^4 + \left(\frac{b^2+c^2}{ad}\right)^4 + \left(\frac{c^2+d^2}{ab}\right)^4 + \left(\frac{d^2+a^2}{bc}\right)^4.$$

3. Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке K. Точка M — середина стороны AC. Прямая, проходящая через точку K параллельно AC, пересекает сторону BC в точке L. Найдите угол AML.

4. На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение шестизначное и оканчивается не на ноль. Петя стер с доски все нули и одну цифру С, после чего там осталось ИКС. Что было написано на доске?

5. На окружности отмечено n точек ($n \geqslant 5$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек, не являющихся соседними. Любые две проведенные хорды могут пересекаться только концевыми точками. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

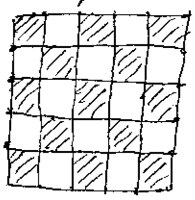
6. На столе находятся три шара и конус (основанием к столу), касаясь друг друга внешним образом. Радиусы шаров равны 20, 40 и 40, а радиус основания конуса равен 21. Найдите высоту конуса.

№1

Заметим, что одна отмеченная клетка образует максимум 4 пары, которые нам нужны. Тогда, чтобы отмеченные клетки достигали этого максимума, нужно чтобы они были не на крае доски.

Значит, нужно разместить как можно больше отмеченных клеток, достигающих максимума на доске 5×5.

Если две отмеченные клетки стоят рядом (общая сторона), они не достигают максимума. Тогда они не должны иметь общих сторон. Этого можно добиться с помощью шахматной раскраски:



При этом отмеченных клеток не более 13.

Одна клетка из данных 14 будет иметь меньше чем 4 интересные пары. Максимум - 3.

Значит всего интересных пар $13 \cdot 4 + 3 = 55$.

Ответ: 55

№2

$$A = \left(\frac{a^2+b^2}{cd}\right)^4 + \left(\frac{b^2+c^2}{ad}\right)^4 + \left(\frac{c^2+d^2}{ab}\right)^4 + \left(\frac{d^2+a^2}{bc}\right)^4$$

По неравенству о средних (так как числа положительные, далее):

$$A \geq 4 \cdot \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2)(d^2+a^2)}{cd \cdot ad \cdot ab \cdot bc} = B$$

Ещё раз используя это неравенство для значений в скобках:

$$A \geq B \geq 4 \cdot \frac{2 \cdot ab \cdot 2bc \cdot 2cd \cdot 2ad}{cd \cdot ad \cdot ab \cdot bc} = 2^2 \cdot 2^4 = 64$$

Значит, $A \geq 64 \Rightarrow$ минимальное значение $A = 64$.

Это значение достигается при $a = b = c = d = 1$

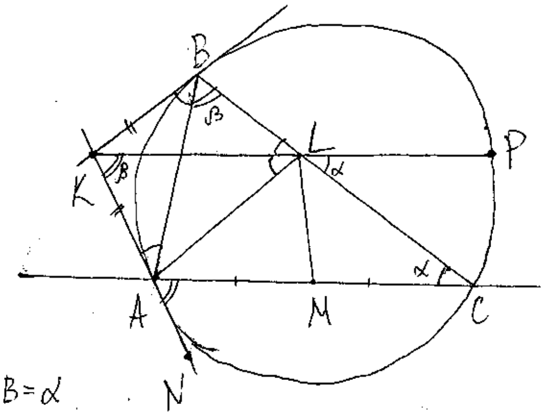
Ответ: 64

№3

Дано: ΔABC - вписанный; K - т. пересечения касательных в т. A и B;
M - середина AC; $KL \parallel AC$ ($L \in BC$)

Найти: $\angle AML$

Решение:



Пусть $\angle AKL = \beta$. Тогда $\angle NAC = \beta$, следовательно $\angle ABC = \beta$ (между касательной и хордой).

Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle CLP = \alpha \Rightarrow KLB = \alpha$

Заметим, что $\angle KAB = \angle KBA = \alpha$ (касат. и хорда).

AKBL - ~~вписан~~ вписанный, так как $\angle AKL = \angle ABC$ и они опираются на AL.

Тогда $\angle ALK = \alpha$.

$\angle BAC = 180° - \alpha - \beta$; $\angle BAL = 180° - \beta - 2\alpha$.

Тогда $\angle BAC - \angle BAL = 180° - \alpha - \beta - 180° + \beta + 2\alpha = \alpha = \angle LAC$.

Так как $\angle LAC = \angle LCA$, ΔALC - равнобедренный. LM - медиана и высота.

Значит, $\angle AML = 90°$.

Ответ: $90°$

№5

Докажем, что Пете выиграет Васю при любых $n \underset{2}{\equiv} 0$.

Заметим, что для случая, когда $n = 4$, Петя выигрывает первым ходом. При $n = 5$ выигрывает Вася, так как после хода Пети остаётся фигура для случая $n = 4$.

Для $n \underset{2}{\equiv} 0$ Петя может первым ходом разделить точки на две части, в каждой из которых количество точек будет равным. Тогда на каждый ход Васи, Петя может делать такой же ход на другой половине точек. Таким образом, он всегда сможет сходить, если сходил Вася.

Для удобства, пусть данные n точек будут точками правильного вписанного многоугольника (n-угольника). Тогда после каждого хода Пети, Вася может мысленно проводить через одну из задействованных в последнем ходе Петей точек диаметр данной окружности и ~~дела~~ проводить хорду, симметричную проведённой Петей в последний раз относительно этого диаметра. Таким

образом, у Васи всегда будет возможность совершить ход после Пети. Значит, он будет выигрывать.
Ответ: при чётных n.

№4

Пусть $a = k$, $b = k$, $c = C$.

$\overline{abc} \cdot \overline{bca} = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6}$; без каких-то x получилось либо $x_i = abc$, либо $\overline{x_i x_j} = abc$, либо $\overline{x_i x_j x_g} = abc$