задача №5 чистовик

3179 …ТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

80

ПИСЬМЕ… АЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Казань

Дата 3.03.18

* *

Вариант 4

1. Каждая клетка таблицы 5×5 окрашена в один из трех цветов: синий, красный или жёлтый. При этом в каждой строке таблицы число жёлтых клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа синих клеток, а в каждом столбце таблицы число красных клеток не меньше числа жёлтых клеток и не меньше числа синих клеток. Сколько синих клеток может быть в такой таблице? Приведите пример соответствующей раскраски.

2. Даны числа $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt[4]{\sin x \sin y}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[4]{\operatorname{tg} y}}.$$

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, центр которой лежит на стороне AB. Окружность ω_1 касается внешним образом окружности ω в точке C. Окружность ω_2 касается окружностей ω и ω_1 в точках D и E соответственно. Прямая BD вторично пересекает окружность ω_2 в точке P, а прямая AC вторично пересекает окружность ω_1 в точке Q. Найдите угол PEQ.

4. Имеются четырехзначные числа m и n, получаемые друг из друга записью цифр в обратном порядке. Известно, что число mn делится на 100, а его десятичная запись состоит из четырех пар одинаковых соседних цифр. Найдите m и n.

5. По краю круглого стола стоит n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них напитки: Петя — квас, Вася — морс. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан на свой выбор так, чтобы после его хода не образовалось двух соседних стаканов с одинаковым напитком. Если в результате действий игроков заполняются все стаканы, то игра заканчивается вничью. В противном случае проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат шары радиусов 2, 2, 5, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса находится посередине между точками касания одинаковых шаров со столом, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

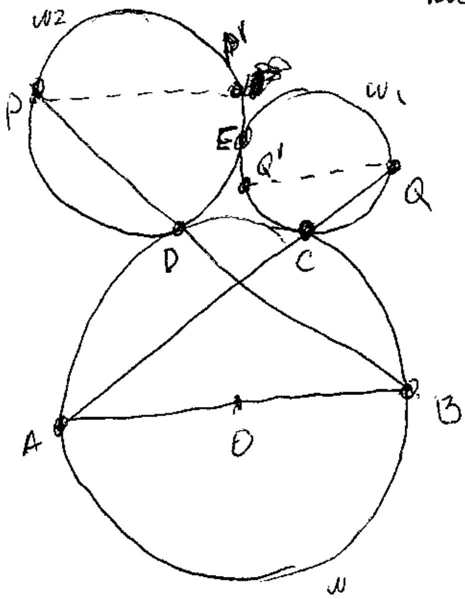
№1
В каждой строке желтых клеток ≥ синих и ≥ крас. ⇒ желтых ≥ 2, иначе
если $Ж \le 1$, то либо к либо с ≥ 2 – противоречие.
Аналогично в каждой строке красных кл. ≥ 2.
значит всего $К + Ж \geq 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20$ из этого следует, что синих
≤ 5. Пусть синих < 5, т.е. ≤ 4 ⇒ $К + Ж \geq 21$ ⇒
либо к либо $Ж \geq 11$. Но тогда посмотрим на линии
противоположного типа для цвета, которого много
(для строки противоположен столбец и наоборот)
Всего 5 линий, а клеток ≥ 11 ⇒ в какой-то из
линий ≥ 3 клетки этого цвета, но т.к. там должно
быть больше противоположного цвета, то противоречие.
(к противопол. Ж) (и наоборот)
Пример на 5 синих клеток.

•	•			Ш
	•	•	Ш	
		Ш	•	•
•	Ш	•		
Ш			•	•

Ш – син.
• – кр.
□ – желт.

В каждой линии = 2 ж = 2 к и = 1 син.

№3



Построим диаметры PP' и QQ' в ок-тях ω_2 и ω_1 со св-вом:

$PP' \parallel AB \parallel QQ'$

Так можно сделать, т.к. C – точка касания, а ⇒ и центр гомотетии ω и ω_1, поэтому при гомотетии AB перейдет в диаметр, параллельный ему, и т.к. $A \to Q$, то этот диаметр проходит через Q. Аналогично с (ω и ω_2)
Тогда заметим, что PP' и QQ' – диаметры параллельные окружностей с центром гомотетии E (точка касания) ⇒ при гомотетии с центром E
~~$PE \to Q$~~ $PP' \to QQ'$, ⇒ P, Q, E - на одной прямой → $\angle PEQ = 180°$.
Стоит заметить, что именно P перейдет в Q, а не P', т.к. гомотетия ~~отр~~ с отрицательным коэф. (иначе было бы противоречие с т. о трех колпаках ($PP' \to BA \to Q'Q \to PP'$, – тождеств. отоб. но произв. коэф. гом. < 0

Задача №5 и №2 см. чистовик

№4

Пусть $m = \overline{abcd}$

~~и этакое~~

$n = \overline{\alpha\beta\gamma\Delta}$

переворачивание = обратный порядок цифр m и n

(1) Тогда ~~mn~~ $mn \vdots 100 \Leftrightarrow (100\overline{ab} + \overline{cd})(100\overline{\alpha\beta} + \overline{\gamma\Delta}) \vdots 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{cd} \cdot \overline{\gamma\Delta} \vdots 100$

$\Rightarrow$ используя условие о переворачивании: $\overline{cd} \cdot \overline{ba} \vdots 100$

(2) Также мы знаем, что т.к. mn состоит из 4 пар одинаковых цифр, то

$mn \vdots 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \vdots 11 \\ n \vdots 11 \end{array}\right.$ без о-я общности $m \vdots 11$

Также заметим, что ни m ни n не делятся на 10, иначе не выполнено условие о перевороте.

Тогда из всех вариантов для m подходят только 44 и 88,

т.к. $mn \vdots 100$, но $n \not\vdots 10$ $\Rightarrow$ $11 \Rightarrow n \vdots 100$ ✗
$22 \Rightarrow n \vdots 50$ ✗
$33 \Rightarrow n \vdots 100$ ✗
$55 \Rightarrow n \vdots 20$ ✗
$66 \Rightarrow n \vdots 50$ ✗
$77 \Rightarrow n \vdots 100$ ✗
$99 \Rightarrow n \vdots 100$ ✗

$m = 44$

Тогда $n \vdots 25 \Rightarrow$ $n = 25$
$n = 75$ ($50 \vdots 10$ - ✗)

$m = 88$

Тогда $n \vdots 25 \Rightarrow n = 25$
$n = 75$

Осталось проверить (m, n)

$\times 5244$
4425

т.к. $m \vdots 11$, то $a - b + c - d \vdots 11$ $\Rightarrow$ ~~$\left[\begin{array}{l} a+c = b+d \\ a+c = 11+b+d \\ a+c = b+d-11 \end{array}\right.$~~ т.к. a, b, c, d - цифры.

~~$\overline{cd} \cdot \overline{ba} \vdots 100$~~

~~$\Leftrightarrow (10c+d)(10b+a) \vdots 100 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 10bd + 10ac + ad \vdots 100$~~

$\left[\begin{array}{l} m \not\vdots 10 \\ n \not\vdots 10 \end{array}\right.$ иначе они не обратные

Заметим, что т.к. $m \vdots 11$, то и $n \vdots 11$ (они перевернуты)

~~$\overline{cd}$ или $\overline{ba}$~~

$\overline{cd} \cdot \overline{ba} \vdots 100$, но $\begin{array}{l} \overline{cd} \not\vdots 10 \\ \overline{ba} \not\vdots 10 \end{array}$ $\left(\begin{array}{l} \text{т.к. } m \not\vdots 10 \\ n \not\vdots 10 \end{array}\right)$

Получаем четыре варианта для $\overline{abcd}$.

Проверяем и подходит:

$\overline{abcd} = m = 6325$
$\overline{dcba} = n = 5236$
$mn = 33117700$

Единственный ответ.

$\overline{ba} = 80$ не подходит т.к. $a \neq 0$

$\overline{ba} = 20$ не подходит т.к. $a \neq 0$

$\overline{ba} = 64$
$\overline{cd} = 75$ $\rightarrow$ $mn = \ldots 46700$ - уже неподходит.

Все случаи:

$\overline{cd}$	$\overline{ba}$
25	04
75	08
50✗ т.к. $\not\vdots 10$	12
	⋮
	96

$\Rightarrow$ без о-я общности $\begin{array}{l} \overline{cd} \vdots 5^2 \\ \overline{ba} \vdots 2^2 \end{array}$ (иначе появи... 10

но $a - b \equiv_{11} d - c$

перебор можно увидеть на сис...

1) если $\overline{cd} = 25$

то $a - b \equiv_{11} 3$

недолгим перебором:

$\left[\begin{array}{l} \overline{ba} = 36 \\ \overline{ba} = 80 \end{array}\right.$ $\overline{ba} = \ldots$

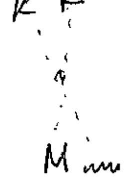
2) если $\overline{cd} = 75$

то $a - b \equiv_{11} -2$

недолгим перебором:

$\left[\begin{array}{l} \overline{ba} = 20 \\ \overline{ba} = 64 \end{array}\right.$ $\overline{ba} = \ldots$

№5
При четном n Петя не может выиграть, т.к.
у Васи есть стратегия для этого:
Рассматриваем стаканы + как правильный n-угольник и играем симметрично относительно его центра. ~~Мы не проиграем~~ Вася не проиграет, т.к. если он не может сходить:



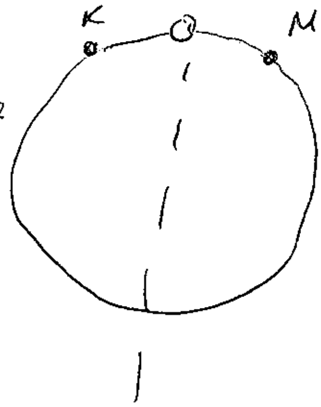
то до его хода уже была ситуация, где 2 кваса стоят рядом.

При нечетном n также у Васи есть стратегия, при которой Петя не побеждает:
Пусть Петя сходит куда-то:

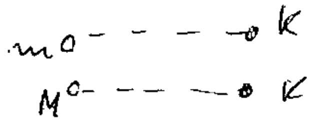
Тогда мы льём через одну чашку.

Т.е. у нас такая ситуация:

~~ситуация~~ ситуация zero



Заметим, что в 0 никто ходить не может.
Объясним нашу стратегию далее:
Играть симметрично относительно |
Пусть Вася не может ходить:



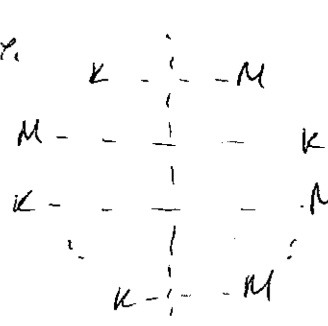
Тогда до этого хода было два кваса подряд.
такие с минимальной хордой всё ок очевидно

* изначально ситуация „zero" - симметричная.

Стоит сделать замечание о том, что симметричный ход в двух случаях выше это ~~x~~ нахождение симм. чашки и вливание туда своего напитка. Т.е. вообще она не симметрична, а как бы обратна ~~ее~~ относительно центра или оси. Для понимания снизу „симметричного" в моем понимании ситуации:

1 случ.

2 случ.



Получаем, что ни при каких n Петя не выигрывает.

~~bd~~ №4 (перебор) ~~вла~~ $a-b \equiv_{11}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3 \equiv -8 \\ -2 \equiv 9 \end{array}}$$

04	4	
08	8	
12	1	
16	5	
20	−2	V
24	2	
28	6	
32	−1	
36	3	V
40	−4	
44	0	
48	4	
52	−3	
56	1	
60	−6	
64	−2	V
68	2	
72	−5	
76	−1	
80	−8	V
84	−4	
88	0	
92	−7	
96	−3	

№2

$$A=\frac{\sqrt[4]{\sin x \sin y}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}+\sqrt[4]{\operatorname{tg} y}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{\cos x \sin y}}+\sqrt[4]{\frac{1}{\cos y \sin x}}}$$

(просто числ. и зн. разделили на $\sqrt[4]{\sin x \sin y}$)

тогда для того, чтобы найти $\max(A)$, нужно найти

$$\min\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{\cos x \sin y}}+\frac{1}{\sqrt[4]{\cos y \sin x}} \geqslant 1+1=2 \Rightarrow \max A \leqslant \frac{1}{2}$$

~~Хотим д-ть, что $\min\left(\frac{1}{A}\right)=2^{\frac{5}{4}}$, тогда $\max(A)=2^{-\frac{5}{4}}$, который достигается при $x=y=\frac{\pi}{4}$~~

$$\cancel{A=\frac{\sqrt[4]{\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}+\sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{3}}+\sqrt[4]{\sqrt{3}}}}$$

*~~$x=y=\frac{\pi}{3}$~~

да, мой чистовик очень грязен.