

70

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



3 4 2 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 18 03 2018

* * * * *

Вариант 10

1. В таблице 3×4 расставлены 12 чисел так, что все семь сумм этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться нулю?

2. Даны числа $x, y, z \in [0, \pi]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x).$$

3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки Q и R соответственно. Прямая QR вторично пересекает описанную окружность треугольника ABR в точке P и вторично пересекает описанную окружность треугольника BCQ в точке S . Прямые AP и CS пересекаются в точке K . Найдите угол между прямыми KO и QR .

4. На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{КСИ}$ и $\overline{ИСК}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Это произведение шестизначное, его крайние цифры равны, а между ними находятся две пары одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?

5. По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geq 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них компот или лимонад. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан любым из двух напитков на свой выбор. Игрок, после чьего хода образовался стакан с лимонадом, у которого оба соседних стакана с компотом, выигрывает. Если игроку не досталось пустого стакана, то он проигрывает. При каких n Петя выигрывает вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат два шара, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи, соединяющие вершину конуса с центрами шаров, образуют равные углы со столом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Покажем, что чисел отличных от 0 > 3

	a		
		b	
			c

т.к. если чисел отличных от 0 3 или меньше, то они могут занять не более

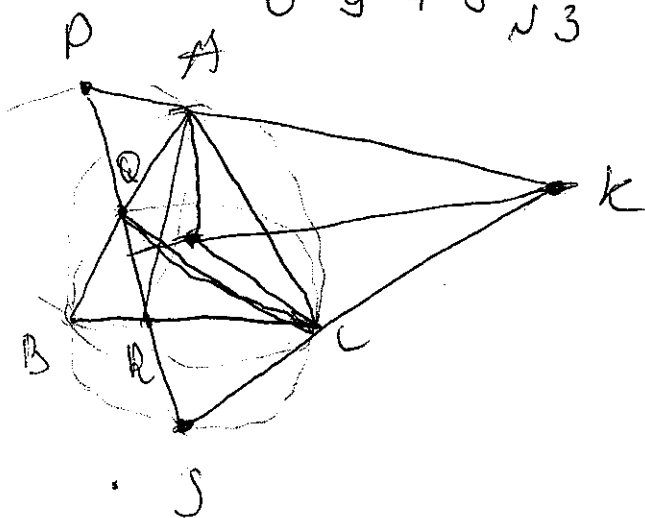
3 столбцов => 1 столб. будет со всеми 0, и

также все будут в разном строках иначе хотя бы одна строка = 0, что противоречит условию, тогда одинаково тогда суммы строк и столбцов будут повторяться, т.к. в каждой строке и столбце, число отличное от нуля и все остальные нули (не считая столб с нулями), тогда сумма чисел в строке и столбце с a равны, что противоречит упр. => такое невозможно, тогда максимум чисел отличных от 0 = 4

Пример

0	3	0	0	3
0	0	7	8	15
0	6	0	0	6
0	9	7	8	23

Все различные нулей Ответ: $O_{max} = 8$



из окр. опис. около $\triangle AAB$

числовик

$\angle ABC = \angle KPS$, т.к. окр. на одну дугу

Аналогично из окр. опис. около $\triangle BQC$

$\angle ABC = \angle KSP$, окр. на одну дугу.

т.к. $\angle KPS = \angle ABC = \angle KSP$, то $\angle KPS = \angle KSP \Rightarrow \triangle KSP - \text{р\i{o}д}$

$\angle PKS = 180 - \angle KSP - \angle KPS$

т.к. O ц. окр., то $\angle AOS = 2\angle ABC = 2\angle KSP$

и

$OAKC$ - впис. ч⁴ угольник ($\angle AKC + \angle AOC = 180^\circ$)

тогда выйдем равные углы окр. на одну дугу.

$\angle COK = \angle CAK$; $\angle CAO = \angle OKC$; $\angle OCA = \angle OKA$

но, т.к. $OA = OC$ (радиусы), то $\angle OAC = \angle OCA$ (р\i{o}д)

$\angle OKC = \angle OKA$

KO - биссектриса р\i{o}д $\triangle PKC \Rightarrow KO$ и высота $\Rightarrow KO \perp PS$ (а значит, $KO \perp QR$)

Ответ: $90^\circ \checkmark$

и

т.к. произведение имеет вид \overline{xyyzzx} , то

оно: 11, т.к. сумма цифр на чет^н и нечет^н позиц.

цифр на чет^н и нечет^н позиц. $\Rightarrow \overline{KCU}$ и $\overline{UCK} = 11$, т.к.

они имеют одну чет^н цифру на ма. 11. Заметим, что

в условии сказано, что $K \neq U \neq C$. Выйдем

все 3^х значные числа: 11, так $K, C \neq 0$, т.к. в этом

случае одно из чисел - двузначное

110	198	288	394	462	550	638	726	825	924
121	209	297	385	473	561	649	737	836	935
32	220	308	396	484	572	660	748	847	946
43	231	319	407	495	583	671	759	858	957
54	242	330	418	506	594	682	770	869	968
65	253	341	429	517	605	693	781	880	979
76	264	352	440	528	616	704	792	891	980
87	275	363	451	539	627	715	803	902	990
							814	913	

Вспомогательные все числа имеющие 0, имеющие одинаковые числа а также оставим одно число вида $\sqrt{100000}$ и рассчитаем произв обратные (заметьте, что $\sqrt{100000}$)

316
 4
 631000

числа с 316, то произв < 100000 и его нет смысла расис.

~~732 x 237~~

$$\begin{array}{r} 341 \\ \times 143 \\ \hline 1023 \\ 1369 \\ 341 \\ \hline 48763 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ \times 451 \\ \hline 154 \\ 770 \\ 616 \\ \hline 69454 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times 156 \\ \hline 990 \\ 176 \\ 187 \\ 176 \\ \hline 1232 \\ 1056 \\ \hline 118096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 781 \\ \hline 176 \\ 187 \\ 187 \\ \hline 1232 \\ 1309 \\ \hline 146047 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 198 \\ \times 891 \\ \hline 198 \\ 198 \\ 198 \\ \hline 1782 \\ 1584 \\ \hline 176418 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209 \\ \times 902 \\ \hline 418 \\ 418 \\ 418 \\ \hline 1881 \\ 1881 \\ \hline 188518 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 253 \\ \times 352 \\ \hline 506 \\ 506 \\ 506 \\ \hline 1263 \\ 1263 \\ \hline 759 \end{array}$$

т.к. число заканч 0, то оно не может, т.к. нечетное. тоже должно быть 0

$$\begin{array}{r} 264 \\ \times 462 \\ \hline 528 \\ 1584 \\ 1056 \\ \hline 121968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 275 \\ \times 572 \\ \hline 550 \\ 1825 \\ 1375 \\ \hline 156300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 286 \\ \times 682 \\ \hline 572 \\ 2288 \\ 1716 \\ \hline 195052 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 297 \\ \times 792 \\ \hline 594 \\ 2673 \\ 2079 \\ \hline 235224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 308 \\ \times 803 \\ \hline 924 \\ 2464 \\ 247324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 319 \\ \times 913 \\ \hline 957 \\ 319 \\ 2371 \\ \hline 291247 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 374 \\ \times 473 \\ \hline 1122 \\ 2618 \\ 1496 \\ \hline 176902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 385 \\ \times 583 \\ \hline 224455 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ \times 693 \\ \hline 1188 \\ 3564 \\ 2376 \\ \hline 274428 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 407 \\ \times 704 \\ \hline 1628 \\ 2849 \\ 286528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 418 \\ \times 814 \\ \hline 1672 \\ 418 \\ 3344 \\ \hline 340252 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 429 \\ \times 924 \\ \hline 1716 \\ 858 \\ 3861 \\ \hline 396396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 495 \\ \times 594 \\ \hline 0 \\ 506 \\ 605 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 517 \\ \times 715 \\ \hline 2585 \\ 517 \\ \hline 3699 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ \times 825 \\ \hline 0 \\ 2695 \\ 1617 \\ 4851 \\ \hline 503965 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 539 \\ \times 935 \\ \hline 3828 \\ 1914 \\ 5104 \\ \hline 533968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 627 \\ \times 726 \\ \hline 3762 \\ 1254 \\ 4389 \\ \hline 455202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 759 \\ \times 957 \\ \hline 5313 \\ 5795 \\ 6831 \\ \hline 726363 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 869 \\ \times 968 \\ \hline 6952 \\ 5214 \\ 7821 \\ \hline 841192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 847 \\ \times 748 \\ \hline 6776 \\ 3388 \\ 5929 \\ \hline 623560 \end{array}$$

погрешит
 нечетное нечетное
 все варианты
 Ответ: 847, 748

Чистовик

№5

~~№11~~

Победная стратегия заключается в том, что каждый из них будет в соседний стакан будет наливаться напиток, который только что налили оппонент, таким образом при четных и победит Васа, т.к. он нальет последним, при нечетных Петя. Лучшая стратегия заключается в том, что для победы игроку нужно, чтобы каждый стаканчики с напитками или через 1, таким образом, наливая в соседний стаканчик такой же напиток стаканчики не будут стоять через 1. Если же при такой стратегии какой-то из участников захочет закончить игру досрочно, это будет означать, что на предыдущий ход его соперник уже мог победить, т.к. нужно поставить через 1 в д миконага $\begin{matrix} a & a & x \\ x & k & y \end{matrix}$. По этим данным с миконагаи налить напиток. Ответ: Петя победит при нечетных и

№2

$$A = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$



2

Замена:

$$a = x - y$$

$$b = y - z$$

$$A = \sin(a) + \sin(b) - \sin(a+b) = \sin a(1 - \cos b) + \sin b(1 - \cos a)$$

4

тогда пусть наибольшее значение A достигается при $a = a_1$ и $b = b_1$

тогда произвольная в этой точке $\neq 0$

$$A'(a) = \cos a(1 - \cos b) + \sin a \cdot \sin b = 0$$

$$\cos a_1 = \cos a_1 \cdot \cos b_1 - \sin a_1 \cdot \sin b_1$$

$$\cos a_1 = \cos(a_1 + b_1)$$

$$a_1 = a_1 + b_1 + 2\pi n$$

$$a_1 = -a_1 - b_1 + 2\pi n$$

$$-b_1 = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2a_1 = -b_1 + 2\pi n$$

$$a_1 = x - y$$

$$2x - 2y = z - y + 2\pi n$$

$$2x - y - z = 2\pi n$$

$\exists k \in \mathbb{Z}, 2\pi],$

$$2a_1 = -b_1$$

то в этой точке найдем экстремум

Подставим в A

$$\sin(\pi - 2a_1) + \sin(a_1) + \sin(-a_1)$$

$$A = -\sin(2a) \quad \text{т.к. } \cos \in [-1; 1]$$

$$A = 2 - 2 \cos 2a \Rightarrow \text{наиб. значение } 2$$

Приведем пример: $x = \pi$
 $y = \frac{\pi}{2}$
 $z = 0$

$$\text{тогда } A = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(-\pi) = 2$$

ответ: 2