САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

4347

90

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
# 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)
Город, в котором проводится Олимпиада Стерлитамак
Дата 22.03.18

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## Вариант 1

1. На клетчатой доске $5 \times 7$ отмечено 9 клеток. Назовем пару клеток с общей стороной *интересной*, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество интересных пар может быть?

2. Даны положительные числа $a, b, c, d$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \left(\frac{a+b}{c}\right)^4 + \left(\frac{b+c}{d}\right)^4 + \left(\frac{c+d}{a}\right)^4 + \left(\frac{d+a}{b}\right)^4.$$

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. В точке $C$ к этой окружности проведена касательная $\ell$. Окружность $\omega$ проходит через точки $A$ и $B$ и касается прямой $\ell$ в точке $P$. Прямая $PB$ пересекает отрезок $CD$ в точке $Q$. Найдите отношение $\frac{BC}{CQ}$, если известно, что $BD$ — касательная к окружности $\omega$.

4. На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение шестизначное и оканчивается на С. Вася стер с доски все нули, после чего там осталось ИКС. Что было написано на доске?

5. На окружности отмечено $n$ точек ($n \geqslant 5$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведенные хорды должны пересекаться (возможно, концевыми точками). Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких $n$ Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

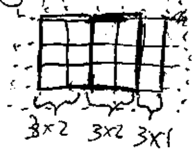
6. На столе находятся три шара и конус (основанием к столу), касаясь друг друга внешним образом. Радиусы шаров равны 5, 4 и 4, а высота конуса относится к радиусу его основания как 4 : 3. Найдите радиус основания конуса.

1.

Заметим, что у каждой клетки не более 4-х соседей => пар с отмеченной клеткой ≤4. У клеток на краю соседей ≤3. Также, если две отмеченные клетки являются соседними, то кол-во пар с ними = 7 . Будем считать, что у одной 4 пары, а у другой 3 (4+3=7). Мы можем отметить не более 8 клеток так, чтобы они имели по 4 соседа (в центральном прямоугольнике 3×5) и чтобы ни одна не являлась соседом другой отмеченной.

Для 3×2 таких ≤3 (перебором)

Для 3×1 таких ≤2.

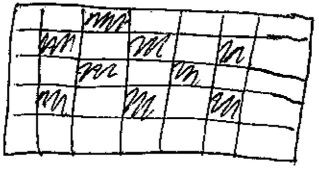


$\underbrace{3\times7} = 2\cdot(\underbrace{3\times5}) + \underbrace{3\times1}$.

Значит 9-я будет точно с краю либо соседом другой отмеченной.

Оценка: $\le 8\cdot4+3 = 35$.

Пример.



Ответ: 35.

2.

$a,b,c,d>0$ – можем воспользоваться н-вом о средних.

$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

$\left(\frac{a+b}{c}\right)^4 \geqslant 2^4\cdot\frac{(ab)^2}{c^4}$ ...

$A \geq 2^4\cdot\left(\frac{(ab)^2}{c^4}+\frac{(bc)^2}{d^4}+\frac{(cd)^2}{a^4}+\frac{(ad)^2}{b^4}\right) \geqslant 2^4\cdot4\cdot\sqrt[4]{\frac{(ab)^2(bc)^2(cd)^2(ad)^2}{(abcd)^4}} = 2^4\cdot2^2 = 2^6$.

н-во о средних для 4-х.

При $a=b=c=d=1$ минимум $A = 2^6$ достигается.

Ответ: $2^6=64$.

4. Заметим, что остаток по модулю 9 возведя в квадрат и не изменился $(u+k+c)$.
Значит $u+k+c \equiv 0$ или $1 \pmod 9$. Также для каждого $c\in\{1,\dots,9\}$ найдем
все $u$ такие, что $cu \equiv c \pmod{10}$ – последняя цифра. Уберем из них $c=u$ и $c=0/u=$
Получили 10 вариантов. Для каждого из них подходит 2 $k\in\{1,\dots,9\}$ | $(u+k+c)\equiv 0$ или $1 \pmod 9$. Перебрав ≤20 вариантов (в нек.-ых $u=k$ или $c=k$). получим ответ.

| c | u |
|---|---|
| 1) 2 | 6, 1 |
| 2) 4 | 6, 1 |
| 4) 5 | 1, 3, 7, 9 |
| 3) 8 | 6, 1 |

612×126=...112, 684×846=...64 (622-2одинаковых), 694×946=...24, 648×486=...28, 765×657=...3

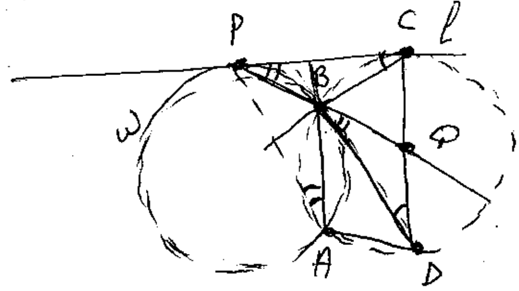
659×586=...88, 135×351=...85, 145×451=...95, 315×153=...95, 325×253=...225,

945×459=...55. 955 – 2одинаковых, и т.д.

uкс кcu, 775 – 2од.

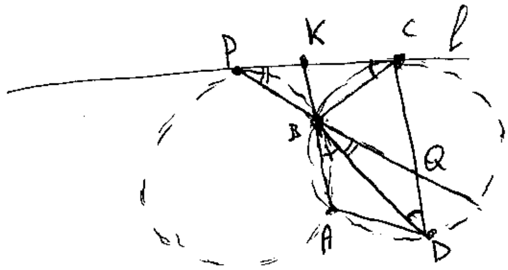
Ответ: (162·621=) 100602

3.



Пусть $\angle BDC = \alpha$. Тогда $\angle PCB = \alpha$, т.к. PC - касательная.
Пусть $\angle DBQ = \beta$. Тогда $\angle PAB = \beta$, т.к. BD - кас. к ω.
Также $\angle BPC = \beta$ (PC кас. к ω).

Продлим AB до пересечения с PC (т. K).
~~BQ до~~



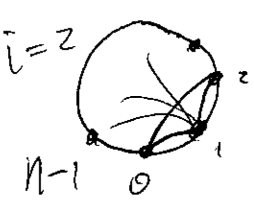
$\angle PBK = \angle ABQ = \beta + \gamma$ ($\angle ABD = \gamma$).
$\angle BKC = \pi - \angle PKB = \angle BPC + \angle PBK = 2\beta + \gamma$
$\angle ABC = \pi - \angle KBC = \angle BKC + \angle KCB = 2\beta + \gamma + \alpha$

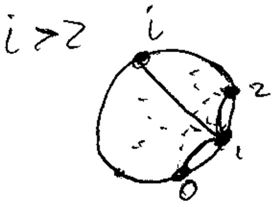
$\angle CBQ = \angle ABC - \angle ABQ = 2\beta + \gamma + \alpha - \beta - \gamma = \alpha + \beta$.
$\angle BCD = \pi - \angle CBD - \angle \cancel{B}CDB = \pi - (2\beta + \alpha) - \alpha = \pi - 2(\alpha + \beta)$
$\angle CQB = \pi - \angle BCQ - \angle CBQ = \alpha + \beta$.
Получили $\angle CQB = \alpha + \beta = \angle CBQ \Rightarrow \triangle BCQ$ - равнобедренный и $BC = CQ$.

Ответ: $\frac{BC}{CQ} = 1$.

5.

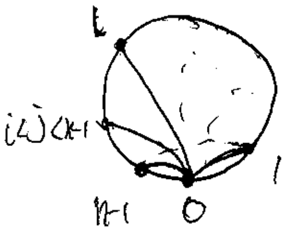
Покажем, что при нечетных n Петя всегда сможет выиграть.
Занумеруем точки от 0 до n-1. Петя должен соединить 0 и 1. Вася должен
будет провести хорду из 0 или 1, иначе хорды не будут пересекаться. Не умоляя
(n≥5 - ~~т~~ такое возможно), если i=2, то
общности, Вася провел хорду (1, i) $i \neq 0$. ~~Если i>2, то~~ Петя должен соединить
(0, 2), такой хорды еще нет, т.к. есть только (0, 1), (1, 2) ~~так~~. Заметим,
что все хорды имеют общие точки. Все остальные хорды будут равны
(1, j), j>2, иначе хорда не будет иметь общих точек с (0, 1) или (1, 2).
Таких хорд n - 2 - нечетно, т.е. Петя проведет последнюю.
Если i>2, то Петя проводит (1, 2). остаются возможны хорды (1, j)
и (0, 2). Их также нечетно.

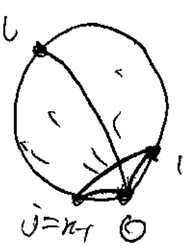




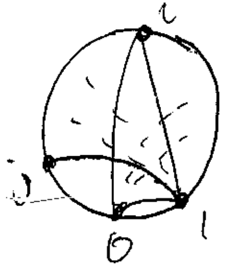
(др. сторона).

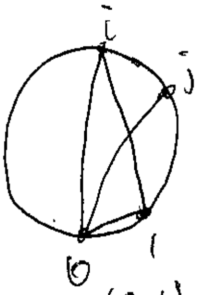
Теперь покажем, что при четном $n$ Вася всегда сможет выиграть. (Такое возможно, т.к. $n \geq 5$.)
Пусть Петя сходил $(0, i)$. Не умаляя общности, $i > 1$. Тогда Вася должен сходить $(0, 1)$. Если Петя сходил $(0, j)$, где $j > i$, то мы должны соединить $(0, n-1)$ или $(1, n-1)$, если $j = n-1$. Тогда как и при нечетном $n$ строится конструкция, в которой хорд четно $(= n)$.

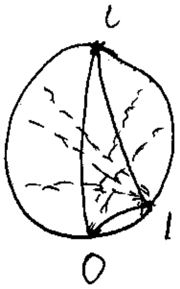




Если Петя сходил $(0, j)$, где $j < i$, или $(1, j)$, где $j > i$, то проводим $(1, i)$. Не трудно заметить, что все хорды попарно имеют общие точки. Остаются возможные хорды $(0, k)$, где $k < i$, или $(1, k)$, где $k > i$. Тогда в сумме их $n$ – четно. Если Петя провел хорду $(1, i)$, то попадаем в такую же конструкцию из $n$ хорд. — Вася выиграет всегда и четном $n$.

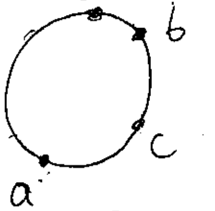






Заметим, что хорды $(a, b)$ и $(c, d)$ пересекаются, если ~~$\{a \leq c\}$ и $b \leq d$ и $b \geq c$~~ или ~~$a \geq c$ и $b \leq d$.~~

$a \in [d, c]$ и $b \in [c, d]$.
или
$a \in [c, d]$ и $b \in [d, c]$.



Остается проверить хорды $(1, k)$ с $(0, f)$, но $f \leq i$, а $k \geq i$ => они не пересекаются.

Ответ: $n$ – нечетно.