50

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6276

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2017–2018

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада МОСКВА

Дата 18.03.2018

* *

Вариант 10

1. В таблице 3×4 расставлены 12 чисел так, что все семь сумм этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться нулю?

2. Даны числа $x, y, z \in [0, \pi]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x).$$

3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки Q и R соответственно. Прямая QR вторично пересекает описанную окружность треугольника ABR в точке P и вторично пересекает описанную окружность треугольника BCQ в точке S. Прямые AP и CS пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми KO и QR.

4. На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Это произведение шестизначное, его крайние цифры равны, а между ними находятся две пары одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?

5. По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них компот или лимонад. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан любым из двух напитков на свой выбор. Игрок, после чьего хода образовался стакан с лимонадом, у которого оба соседних стакана с компотом, выигрывает. Если игроку не досталось пустого стакана, то он проигрывает. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?

6. На столе лежат два шара, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи, соединяющие вершину конуса с центрами шаров, образуют равные углы со столом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№1

Пример: сумма по столбцам 9, 1, 4, 7

по строкам 16, 5, 0

9	0	0	7
0	1	4	0
0	0	0	0

Во всех строках и столбцах все суммы различны

Такой расстановка 8 нулей

Докажем, что при наличии ~~меньше~~ мин. 9 нулей ~~...~~ минимум 2 суммы равны. Если в расстановке не менее 9 нулей, то не более 3х ненулевых чисел. Таким образом 1 столбец будет нулевым, если в каком-то столбце стоят 2 или более ненулевых числа, то хотя бы 2 столбца будут нулевые. Аналогично если в какой-то строке стоят сумма более чем, то в какой-то строке на стоят нули. Если во всех строках как и столбцах стоят не более одного ненулевого числа, то в строке и столбце пересечения которых стоит не 0 сумма одинакова. Таким образом ответ не более 8.

№2

Пусть, x, y и z = 0 или π, тогда $x-y$ и $y-z$ и $z-x$ = 0 или π или $-\pi$ а тогда сумма равна 0. рассмотрим случаи, когда хотя бы одно из x y z не равно ни 0 ни π, тогда пусть $x \neq 0$ и $x \neq \pi$, тогда x' должна быть 0. $\cos(x-y)-\cos(z-x)=0$? Т.к. $x-z$ и $z-x$ принадлежат отрезку от $-\pi$ до π, то верна система $\begin{cases} x-y = z-y \\ x-y = x-z \end{cases}$ рассмотрим два случая. 1ый:

$x-y = x-z$, тогда $y = z$ и тогда $A=0$

2 ой: $x-y = z-x$, тогда $x = \frac{y+z}{2}$, тогда $A = 2\cdot\sin\left(\frac{z-y}{2}\right) + \sin(y-z)$

Пусть $\frac{z-y}{2} = \alpha$, тогда $A = 2\sin\alpha - \sin(2\alpha)$ т.к. $\sin\alpha$ и $\sin 2\alpha$ одного знака, то если $\sin\alpha < 0$, то $A \leq 0 - \sin(2\alpha) \leq 1$

Если $\sin\alpha > 0$, то $A \leq 2$.

Значит $A > 2$ быть не может и 2 достигается при $x = \frac{\pi}{2}$

$z = \pi$ и $y = 0$. Ответ: 2

№5 При четном n у Васи есть выигрышная стратегия. Вот эта стратегия: разобьем стаканы на пары соседних и после каждого хода Пети поливаем его напиток соседу. Тогда у любого лимонада сосед будет тоже лимонад и поэтому ~~...~~ как ситуации КЛК не получится. Тогда последний стакан польет Вася и выиграет. При нечетном n может выиграть Петя. Вот его стратегия: первым ходом Петя поливает компот в любой стакан, а затем ~~также~~ сведет также, как и Вася при четном n. И тогда ситуации КЛК не получится, потому что у каждого Л есть сосед Л. А значит выиграет Петя полив последний стакан

Ответ: при нечетном n

№3

Знаем: $\angle APR = \angle ABR$ т.к. $\angle$ вписанные и опираются на одну дугу AR ~~...~~ AR

Аналогично $\angle CSQ = \angle CBQ$, поэтому $\angle KSC = \angle KPS = \angle ABC$ или ... Тогда по св-ву ΔKSP р/б $KS = KP$

$\angle KSC = \angle KPS = 180 - \angle ABC$. Тогда $\angle AOC = 360 -$ рассмотрим два случая: 1ый — если $\angle ABC$ тупой, тогда $\angle AOC = 360 - 2\cdot\angle ABC$. $\angle AKC = 180 - \angle KPS - \angle ASP = 180 - 2\cdot(180 - \angle ABC) = 2\cdot\angle ABC - 180$. 2-ой сл-й: если $\angle ABC$ — острый, тогда $\angle AOC = 2\cdot\angle ABC$ и $\angle AKC = 180^\circ - 2\cdot\angle ABC$. В обоих случаях $\angle AKC + \angle AOC = 180^\circ$ поэтому 4-х угольник AKCO вписанный. обозначим ~~через~~ R — радиус описанной окружности. Т.е. $R = AO = OC$

4-х угольник AOCK тоже вписанный. $AO = OC$, тогда $\angle AKO = \angle OKC$. Т.е. KO биссектриса $\angle PKS$. По св-ву р/б Δ (ΔKPS) $KO \perp PS$ а поэтому $\angle$ между прямыми KO и $PS = 90^\circ$

Ответ: 90°.

УТВЕРЖДАЮ:
Председатель Апелляционной комиссии

_______________ (_______________)

ПРОТОКОЛ

рассмотрения апелляции участника Олимпиады школьников
Санкт-Петербургского государственного университета

г. Санкт-Петербург   № 3   «06» 04 2018 г.

Апелляционная комиссия в составе:

1. Гончарова М. В.
2. Дементьев А. В.
3. Лавров К. Ю.
4.
5.

рассмотрела апелляционное заявление участника Олимпиады школьников СПбГУ:

ФИО: Абидов Александр Тимурович

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады: математика

Количество набранных баллов до апелляции: 50

По результатам рассмотрения апелляционного заявления участника Олимпиады, Апелляционная комиссия приняла следующее решение: Задачи №1 и №3 решены полностью и оценены максимальным баллом. В задаче №2 метод решения не обоснован — оставить оценку за эту задачу без изменения. Оценку за задачу №5 поднять на 10 баллов. Общую оценку за работу поднять до 60 баллов. Признать участника призером Олимпиады школьников СПбГУ по математике

Количество набранных баллов после апелляции: 60

Подписи членов Апелляционной комиссии:

_______ (Гончарова)
_______ (Дементьев)
_______ (Лавров)
_______ (_______)
_______ (_______)

С решением Апелляционной комиссии ознакомлен(а) Абидов Александр Тимурович
(ФИО и подпись поступающего)

06.04.2018
(дата)