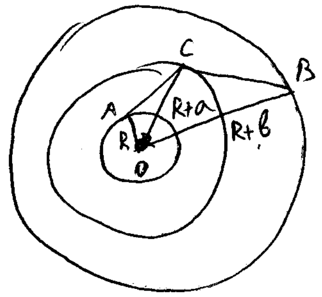
→ t_{min} частн. $= \frac{37,5}{1} + \sqrt{23} = 37,5 + \sqrt{23} \approx$ 42 сек.

⑦ в общем случае ~~...~~ при взятии производной при данных скоростях выходит также, что $\angle OCB = 90°$ → ~~...~~ результат вычислений тот же.

Ответ

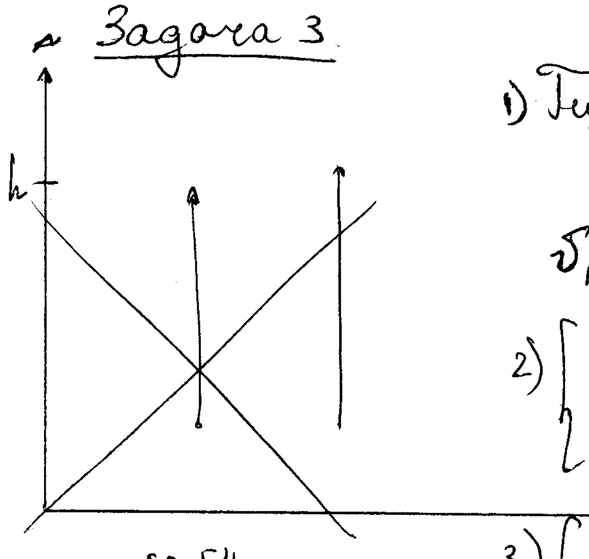
⑧ программа на языке прог. Pascal




```
var R:integer;
l,a,b:real;
D,cosOBC,BC,cosADC,t,AC:real;

begin \\ module math
math;
read(a,b);
R:=100;
read(l);
BC:=((R+b)^(2)-(R+a)^(2))^(0.5);
cosOBC:=(R+a)/(R+b);
D:=(2*sin(l)*(1-cosOBC^(2))^(0.5))^(2)-4*(sin(l)^(2)+cosOBC^(2));
cosADC:=(2*sin(l)*(1-cosOBC^2)^(0.5)+D^(0.5))/2;
AC:=(R^(2)+(R+a)^(2)-2*R*(R+a)*cosADC)^(0.5);
t:=((AC/1+BC/10)*1000 div 1)/1000; \\ с точностью до тысячной
write(t);
end.
```

Задача 3



1) Пусть скорость E2-E4 при подъеме ϑ_1

R2-D2 ϑ_2

$\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} \overset{[км]}{h} = \overset{[км/ч]}{\vartheta_1}(\overset{[час]}{t_1} + 12:3600) \\ h = \vartheta_2 \cdot t_1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} h = (\vartheta_1 + 3)\cdot(t_2 + 7,2:3600) \\ h = (\vartheta_2 + 3)\cdot(t_2) \end{cases}$

продолжение на Чистовике 1.

6893 ...УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

1	2	3	4	Σ
100/100	90/100	100/100	5/100	76

заполняется жюри!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Город, в котором проводится Олимпиада Екатеринбург

Дата 12.03.2017

****

Вариант π

****

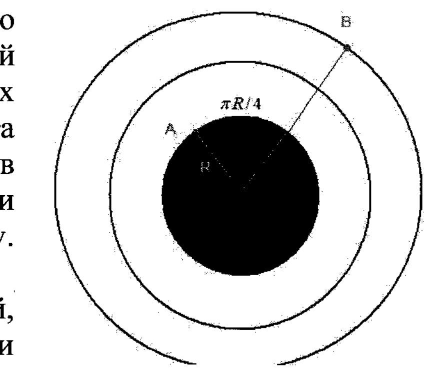
ЗАДАЧА № 1

Для проведения праздника в честь открытия нового вещества, на космической станции решили украсить кают-компанию. С этой целью космо-лаборантка вырезает из бумаги произвольные выпуклые шестиугольники. Ее подруга складывает каждый вырезанный многоугольник по линии, соединяющей две произвольные точки на различных сторонах шестиугольника. Через некоторое время подруги заметили, что периметр контура фигуры, получившейся после сгибания, меньше периметра исходного шестиугольника. Это наблюдение они решили незамедлительно проверить, проведя компьютерное моделирование.

Предложите алгоритм такой проверки. Укажите, как можно задать произвольный выпуклый шестиугольник, линию сгиба, и способ нахождения периметра исходного многоугольника и контура фигуры, получающейся после сгиба.

ЗАДАЧА № 2

При исследовании планеты шарообразной формы с радиусом R=100 было замечено, что ее атмосферу можно условно разделить на два слоя. Ближний к поверхности слой состоит из смеси высокотоксичных и химически агрессивных веществ. Максимально возможная скорость полета автономного зонда внутри этого слоя составляет 1 единицу в секунду. Более высокий слой является менее агрессивным и скорость полета зонда в нем составляет 10 единиц в секунду. Толщина каждого слоя одинакова и равна 10 единицам.



Маршрут зонда между орбитальной станцией, расположенной на верхней границе атмосферы в точке B и точкой A на поверхности такой, что угол BOA равен $\pi R/4$, (O - центр шара), состоит из двух отрезков прямой BC и CA, где C - некоторая точка на границе между слоями. Найдите угол BOC такой, чтобы маршрут зонда получился кратчайшим по времени.

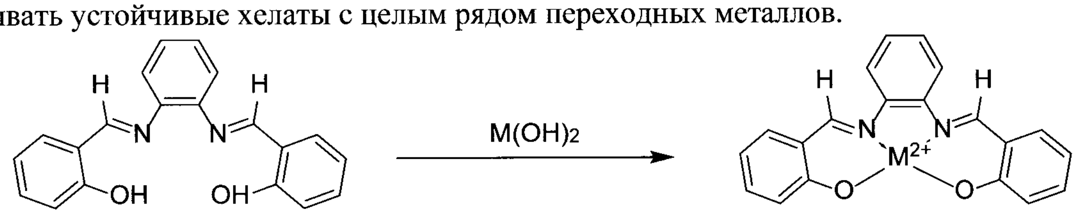
Напишите программу на языке C, C++, Pascal для поиска минимального времени полета для различных (задаваемых пользователем) параметров: высоты каждого из атмосферных слоев и угла BOA.

ЗАДАЧА № 3

Два дрона, E2-E4 и R2-D2, исследуют атмосферу планеты. Исследователи заметили, что при подъеме с поверхности планеты на некоторую высоту E2-E4 отстает от R2-D2 на 12 секунд. При спуске вниз, каждый из дронов увеличивает свою скорость на 3 км/ч по сравнению со скоростью подъема; при этом E2-E4 отстает от R2-D2 на 7.2 секунды. Известно, что если средние скорости дронов выразить в км/ч, то значения этих скоростей будут целыми числами. Найдите все возможные пары целых значений средних скоростей подъема дронов.

ЗАДАЧА № 4

Лаборатория, расположенная на одном из искусственных спутников, занимается изучением различных оснований Шиффа (молекул, содержащих азометиновую группу RC=N-), среди которых особое место занимают соединения, являющиеся продуктом взаимодействия салицилового альдегида, а также замещенных салициловых альдегидов, с различными диаминами. Данные соединения, являющиеся тетрадентатными N_2O_2 основаниями Шиффа и известные как основания Шиффа саленового типа (от названия простейшего представителя ряда, являющегося продуктом реакции салицилового альдегида и этилендиамина - Salen), способны образовывать устойчивые хелаты с целым рядом переходных металлов.



Рассчитайте, катион, какого из предложенных ниже металлов, наилучшим образом подходит в полость вышеуказанного лиганда. Для расчета используйте следующие данные:

Длины связей			
Связь	Длина (Å)	Связь	Длина (Å)
C-C	1.54	C=C	1.34
C≡C	1.21	C_{Ar}-C_{Ar}	1.4
C-N	1.47	C=N	1.34
C≡N	1.14	C-O	1.43
C=O	1.21	O-H	0.96
H-H	0.6		

Ковалентные радиусы			
Элемент	R (Å)	Элемент	R (Å)
Ca	1,76	Zn	1.22
Mg	1.41	Cu	1,32
Pd	1.39	Pt	1.36
Fe	1.32	Co	1.26
O	0.66	N	0.71

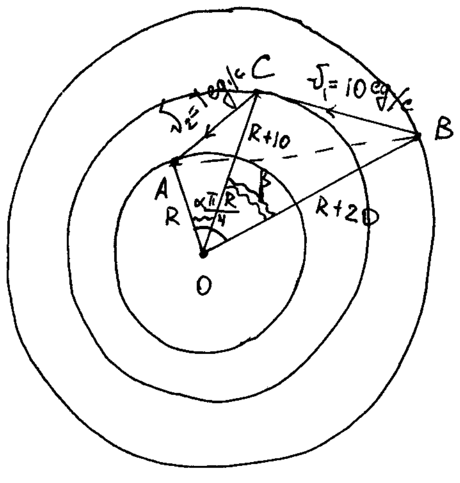
Задача 2.

1) Необходимо двигаться с $t = min$

$\vartheta_1 = 10\vartheta_2$

$t = t_1 + t_2$

$t_1 = \frac{BC}{\vartheta_1}$ $\quad t_2 = \frac{AC}{\vartheta_2} \rightarrow t = \frac{AC}{\vartheta_2} + \frac{BC}{10\vartheta_2} = \frac{10AC + BC}{10\vartheta_2}$



2) Пусть $\angle AOC = \alpha$

$\angle COB = \beta$

При ~~этом~~ минимальный возможный $\angle OCB \geq 90°$ (т.к. BC - отрезок прямой)

3) $\breve{\alpha} + \breve{\beta} = \frac{\pi R}{4}$

$\angle\alpha + \angle\beta = \frac{\pi}{4} = 45°$

4) по т. ~~со~~ косинусов 1. $AC^2 = R^2 + (R+10)^2 - 2R \cdot (R+10) \cdot \cos\alpha$

2. $\begin{cases} BC \leq \sqrt{(R+20)^2 - (R+10)^2} \\ BC^2 = (R+10)^2 + (R+20)^2 - 2(R+10)(R+20) \cdot \cos\beta \end{cases}$ ← по т. Пифагора и (3)

5) $t_{min} \rightarrow$ $t' = 0$ $\quad$ t зависит от соотнош. α и β

6) Рассмотрим частный случай, когда $BC - MAX \rightarrow \angle OCB = 90°$

$10 \cdot t_1 = \sqrt{120^2 - 110^2}$

$10 t_1 = \sqrt{14400 - 12100}$

$10 t_1 = 10\sqrt{144 - 121}$

$t_1 = \sqrt{23}$ сек.

$\cos\beta_{MAX} = \frac{R+10}{R+20} = \frac{11}{12}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin 45°$

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1-\cos^2\alpha} \cdot \frac{11}{12} + \cos\alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{121}{144}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1-\cos^2\alpha} \cdot \frac{11}{12} + \cos\alpha \frac{\sqrt{23}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1-\cos^2\alpha} \cdot 11 + \sqrt{23} \cdot \cos\alpha = 6\sqrt{2}$ $/ ^2$

$(1-\cos^2\alpha) \cdot 121 = 72 - 12\sqrt{46}\cos\alpha + 23\cos^2\alpha$

$121 - 121\cos^2\alpha - 72 + 12\sqrt{46}\cos\alpha - 23\cos^2\alpha = 0$

$-144\cos^2\alpha + 12\sqrt{46}\cos\alpha + 49 = 0$

$144\cos^2\alpha - 12\sqrt{46}\cos\alpha - 49 = 0$

$D = 144 \cdot 46 + 4 \cdot 49 \cdot 144 = 144 \cdot 2(23 + 2 \cdot 49) = 144 \cdot 2 \cdot 121$

$\cos\alpha_{1,2} = \frac{12\sqrt{46} \pm 12 \cdot 11 \cdot \sqrt{2}}{288}$

$\alpha \leq 90 \rightarrow \cos\alpha = \frac{\cancel{12}\sqrt{46} + \cancel{132}\sqrt{2}}{\cancel{288}\ \cancel{144}\ 24} \rightarrow$

$\rightarrow AC = \sqrt{10000 + 12100 - 200 \cdot 110 \cdot \frac{\sqrt{46} + 11\sqrt{2}}{24}} = \sqrt{22100 - 22000 \cdot \frac{\sqrt{46} + 11\sqrt{2}}{24}} =$

$= \sqrt{\frac{100(221 \cdot 24 - 220 \cdot (\sqrt{46} + 11\sqrt{2}))}{24}} = 5\sqrt{\frac{221 \cdot 24 - \sqrt{2} \cdot 220(\sqrt{23} + 11)}{6}} =$

$\approx 5\sqrt{\frac{221 \cdot \cancel{24}^{12} - 14 \cdot \cancel{22}^{11} \cdot 16}{\cancel{6}\,3}} \approx 5\sqrt{\frac{2652 - 2464}{3}} \approx 5\sqrt{\frac{188}{3}} \approx 5 \cdot 7{,}5 \approx$ $\quad \sqrt{2} \approx 1{,}4$ $\quad \sqrt{23} \approx 5$

$\approx 37{,}5$

Чистовик 1.

$\cancel{v_1(t_1(t+12:3600)} = \cancel{v_2 \cdot t_1}$

Продолжение задачи 3.

$$\begin{cases} h = v_1(t_1 + 12:3600) \\ h = v_2 \cdot t_1 \\ h = (v_1+3)\cdot(t_2 + 7{,}2:3600) \\ h = (v_2+3)\cdot t_2 \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{h}{v_2}$$

$$\frac{h}{v_1} = \frac{h}{v_2} + \frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{600}{\cancel{3600}}}$$

$$\frac{h(v_2 - v_1)}{v_1 v_2} = \frac{1}{300} \to h = \frac{v_1 v_2}{300(v_2 - v_1)}$$

$$t_2 = \frac{h}{v_2+3}$$

$$\frac{h}{v_1+3} = \frac{h}{v_2+3} + \frac{\overset{2}{\cancel{72}}}{\underset{1000}{\cancel{36000}}}$$

$$\frac{h(v_2 \cancel{+3} - v_1 \cancel{-3})}{(v_1+3)(v_2+3)} = 0{,}002$$

$$h = \frac{(v_1+3)(v_2+3)}{500(v_2 - v_1)} \to \frac{v_1 v_2}{300\cancel{(v_2 - v_1)}} = \frac{(v_1+3)(v_2+3)}{\cancel{500(v_2-v_1)}}$$

$$v_1 \neq v_2$$

$$v_1 v_2 \cdot 5 = 3(v_1+3)(v_2+3)$$

$$v_1 v_2 \cdot \frac{5}{3} = v_1 v_2 + 3v_1 + 3v_2 + 9$$

$$\frac{2}{3} v_1 v_2 - 3v_1 - 3v_2 - 9 = 0 \qquad v_1, v_2 - \text{целые}$$

$$2 v_1 v_2 - 9(v_1 + v_2) - 27 = 0$$ → Заметим, что $2v_1 > 9$ иначе → решений нет.

$\to v_1 \geqslant 5$ выразим $v_2 = \dfrac{9(3+v_1)}{2v_1 - 9}$

$v_1 = 5 \to v_2 = \dfrac{9 \cdot 8}{1} = 72$ — эта пара чисел подходит.

$\sigma_1 = 6 \rightarrow \sigma_2 = \frac{\cancel{9}^{3}(3+6)}{\cancel{12-9}} = 18 \cdot 3 = 54$ – тоже подходит

Докажем по мат. индукции, что для любого целого $\sigma_1 \geq 5$ σ_2 будет также целым.

<u>Б.И.</u> $\sigma_1 = 5$ – соответствует условию

<u>Ш.И.</u> $+1$

<u>П.И.</u> пусть для некот. $\sigma_1 = x$ $x \geq 5$ и целое σ_2 – будет также целым. Докажем, что для $\sigma_1 = x+1$ σ_2 – будет также целым.

$\sigma_{2_x} = \frac{9(3+x)}{2x-9} = z$ целое $\left[\sigma_{2_{x+1}} = \frac{9(4+x)}{2(x+1)-9} = \frac{9(4+x)}{2x-7} = m \right.$

$z(2x-9) = 27+9x \rightarrow 2zx - 9z = 27+9x$

$m(2x-7) = 36+9x$ $\qquad x = \frac{9(z+3)}{2z-9}$

~~$zz =$~~

$x(2m-9) = 36+7m$

$x = \frac{36+7m}{2m-9} \rightarrow \frac{9(z+3)}{2 \cdot z - 9} = \frac{36+7m}{2 \cdot m - 9}$

$\Downarrow$

неверное П.И. $\leftarrow$ ~~m отличается на одну и ту же целую величину от z до определенного момента~~

Ответ: Для любого целого $\sigma_1 \geq 5$ ~~σ_2 будет целым~~ ~~Доказано.~~ и меньшие, чем $\rightarrow$

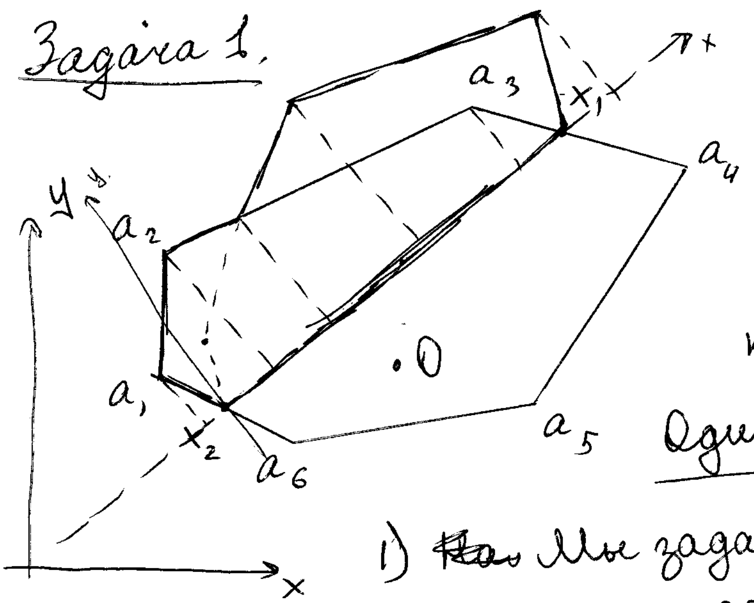
σ_1	σ_2
5	72
6	54
7	18
~~8~~	
9	12

, т.к. с возрастанием σ_1 уменьшается σ_2.

Это будет выполняться для любого числа, кратного 5 или 6 или 7 или 9.

Чистовик 2.

Задача 1.



Для выпуклого шестиугольника сумма углов $= 720^\circ$ и каждый угол должен быть $< 180^\circ$ и $> 0^\circ$.

Один из возможных алгоритмов:

1) ~~На~~ Мы задаем ортогональную систему координат. Выбираем рандомную точку a_1, а затем также a_2.

a_1 (x_1, y_1)

a_2 (x_2, y_2)

2) Далее выбираем рандомно точку a_3 (x_3, y_3). Для них

Задаем точку, равноудаленную ~~то~~ от 3-х других во внутренней окрестности $\angle a_1 a_2 a_3$. Точка O. Так же проверяем, чтобы $a_3 \notin (a_1 a_2)$. Если a_3 не подходит по условиям, выбираем заново, продолжаем цикл, пока не выполнится условие.

4) Делаем аналогично для a_4, a_5, a_6, но с условием, что ~~угол~~ например, для a_5 угол $\angle a_3 a_4 a_5 \leq 180^\circ$ и для этого угла точка O будет во внутренней окрестности.

5) Мы задали все точки. Далее задаем точки сгиба x_1 и x_2. Выбираем рандомную сторону. А потом координату, принадлежащую этой стороне $\rightarrow$ это x_1

6) Берем еще одну рандомную сторону. Если это та же сторона, то выбираем заново, пока не выполнится условие, далее берем аналогично координату $\in$ отрезку выбранной стороны x_2.

7) Переводим систему координат (ортогональную), так что $x_1 x_2$ – ось X. Для всех точек, ~~это~~ x_2 – начало координат у которых $y < 0$ мы ~~берем~~ берем это

значение по модулю - то есть, на примере рисунка, для

a $(x_6, -y_6)$.

8) Далее мы опускаем перпендикуляры из точек на x, x_2.

Соединяем точки так, что соединение будет м/у ~~соседни~~ точками,

у которых перпендикуляры "соседствуют".

Находим сумму этих отрезков $\pm[x_1, x_2]$.

Для нахождения периметра исходной фигуры мы

также пользуемся системой координат.

9) сравниваем ~~дл~~ периметры.

Готово.

Задача 4.

Нам предложены элементы Ca, Mg, Pd, Fe, O, N, Co, Pt, Cu, Zn

Из них не подходят N и O, т.к. их радиусы < 1

Не подходит Ca, Pd, Mg.

Нам нужен один катион → из условия задачи не подойдет

Fe и Cu.

Подходит Co (кобальт), т.к. он имеет средний ковалентный

радиус. ~~при 1 его~~

Ответ: Co