

| | | | | |
|-----|----|-----|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
| 100 | 80 | 100 | - | 50 |

заполняется жюри!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ

2016-2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады ИНЖЕНЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 19.03.2017

Вариант Ω

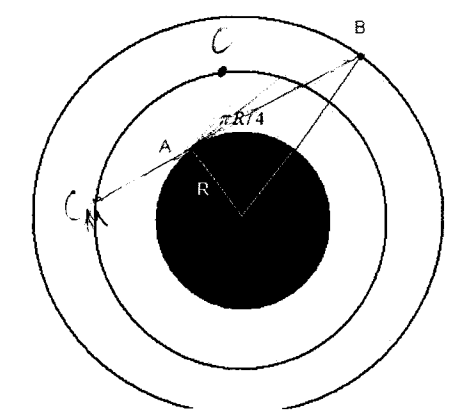
ЗАДАЧА № 1

При исследовании астероида были обнаружены многочисленные рисунки. Каждый из них представлял собой окружность и описанные вокруг нее квадрат и треугольник. Расшифрованные надписи гласили, что внутри треугольника всегда оказывается более половины периметра квадрата. Исследователи хотят провести компьютерное исследование и проверить это утверждение.

Предложите алгоритм такой проверки. Укажите, как можно задавать фигуры, обладающие нужным свойством, и как оценить периметр части квадрата, находящейся внутри треугольника.

ЗАДАЧА № 2

При исследовании планеты шарообразной формы с радиусом $R=100$ было замечено, что ее атмосферу можно условно разделить на два слоя. Ближний к поверхности слой состоит из смеси высокотоксичных и химически агрессивных веществ. Максимально возможная скорость полета автономного зонда внутри этого слоя составляет 1 единицу в секунду. Более высокий слой является менее агрессивным и скорость полета зонда в нем составляет 10 единиц в секунду. Толщина каждого слоя одинакова и равна 10 единицам. Маршрут зонда между орбитальной станцией, расположенной на верхней границе атмосферы в точке В и точкой А на поверхности такой, что угол ВОА равен $\pi R/4$, (О - центр шара), состоит из двух отрезков прямой ВС и СА, где С - некоторая точка на границе между слоями. Найдите угол ВОС такой, чтобы маршрут зонда получился кратчайшим по времени. Напишите программу на языке С, С++, Pascal для поиска минимального времени полета для различных (задаваемых пользователем) параметров: высоты каждого из атмосферных слоев и угла ВОА.



используя граничные, выведем минимальный и максимальный возмущающий угол (значения угла в градусах)

$$\gamma_{min} = \arccos \frac{OA}{OC} = \arccos \frac{r}{r+k} = \arccos \frac{r}{r+k}$$

$$\gamma_{max} = \arccos \cos \angle COH + \arccos \cos \angle BOH = \arccos \frac{r}{OC_1} + \arccos \frac{r}{OB}$$

Далее переберем γ от γ_{min} до γ_{max} с шагом k (в градусах), за который лучше программа записит для γ (чем меньше k , тем более точный результат выдает программа).

Также введем переменную kas , которая равна длине касательной ВС к границе слоя атмосферы. Если при переборе $\angle BOС$ прямая СВ больше kas , то прямая СВ будет иметь две точки пересечения с окружностью граница атмосферы. В этом случае время полета $t = \frac{AC}{1} + \frac{BC_2}{10} + \frac{CC_2}{1}$, где C_2 - точка, лежащая на ВС и дальше ее несове.

Если $CB < kas$, тогда $t = \frac{AC}{1} + \frac{BC}{10}$.

Перебирая $\angle BOС$, надо сравнивать полученные в каждом случае время и извлекая минимальное время полета.

Данный алгоритм верен при $\angle AOB \geq 90^\circ$

При $\angle AOB < 90^\circ$ время ищется несколько иначе.

Перебирается $\angle BOС$ от $(0+k)$ до $\angle AOB$ (в градусах)

$$t = \frac{CB}{10} + \frac{OA}{1}, \text{ где } CB = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \angle BOС}, AC = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC}$$

(если $\angle AOC = \angle AOB - \angle BOС = 0$, то $AC = h_1$)

при $\angle AOB = 0$ $t = \frac{h_1}{1} + \frac{h_2}{10}$

Таким образом, представлена программа на языке Pascal. Компилятор: Pascal ABC
 Ответ выводится в градусах. Входные данные угла AOB даны в градусах.
 прогит угol;

```

var
  OA, OB, OC, OH, BC, AC, yBOC, yAOB, yOBC, kas, h1, h2, r, k, CC1, tmin, t, yisk: real;
  i: integer;
begin
  Read(h1);
  Read(h2);
  Read(yAOB);
  Read(k);
  r := 100;
  tmin := 10000000;
  OA := r;
  OC := r + h1;
  OB := r + h1 + h2;
  kas := sqrt(sqr(OB) - sqr(OC));
  if yAOB >= 90 then
  begin
    ...
  end
  end

```

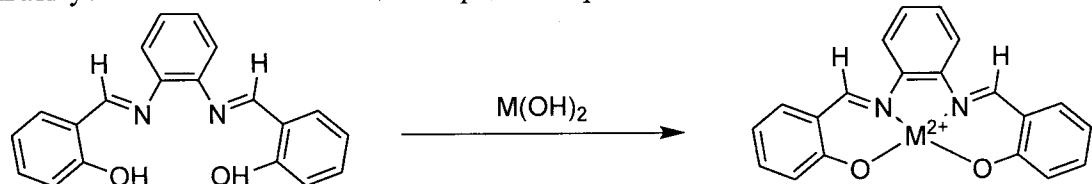
(или на языке C/C++/Pascal) / программа на дан. листе.

ЗАДАЧА № 3

При исследовании поверхности планеты два легких дрона прошли некоторое время в атмосферном течении, скорость которого 5 км/ч, из пункта А до пункта В и обратно тем же путем до пункта А. При этом от А до В дроны прошли с разницей в 270 минут, а от В к А – с разницей в 108 минут. Известно, что если средние скорости дронов выразить в км/ч, то значения этих скоростей будут целыми числами. Найдите все возможные пары целых значений средних скоростей дронов

ЗАДАЧА № 4

Лаборатория, расположенная на одном из искусственных спутников, занимается изучением различных оснований Шиффа (молекул, содержащих азометиновую группу RC=N-), среди которых особое место занимают соединения, являющиеся продуктом взаимодействия салицилового альдегида, а также замещенных салициловых альдегидов, с различными диаминами. Данные соединения, являющиеся тетрадентатными N₂O₂ основаниями Шиффа и известные как основания Шиффа саленового типа (от названия простейшего представителя ряда, являющегося продуктом реакции салицилового альдегида и этилендиамина - Salen), способны образовывать устойчивые хелаты с целым рядом переходных металлов.



Рассчитайте, катион, какого из предложенных ниже металлов, наилучшим образом подходит в полость вышеуказанного лиганда. Для расчета используйте следующие данные:

| Длины связей | | | |
|--------------|-----------|----------------------------------|-----------|
| Связь | Длина (Å) | Связь | Длина (Å) |
| C-C | 1.54 | C=C | 1.34 |
| C≡C | 1.21 | C _{Ar} -C _{Ar} | 1.4 |
| C-N | 1.47 | C=N | 1.34 |
| C≡N | 1.14 | C-O | 1.43 |
| C=O | 1.21 | O-H | 0.96 |
| H-H | 0.6 | | |

| Ковалентные радиусы | | | |
|---------------------|-------|---------|-------|
| Элемент | R (Å) | Элемент | R (Å) |
| Ca | 1.76 | Zn | 1.22 |
| Mg | 1.41 | Cu | 1.32 |
| Pd | 1.39 | Pt | 1.36 |
| Fe | 1.32 | Co | 1.26 |
| O | 0.66 | N | 0.71 |

№3. Пусть v_1 и v_2 - скорости дронов; $v_1 < v_2$
 $\frac{1}{3}$ АВВ они прошли против течения с разницей $t_1 = 270 \text{ мин} = 4,5 \text{ часа}$, расстояние S
 $\frac{1}{3}$ ВВА они прошли по течению с разницей $t_2 = 108 = 1,8 \text{ часа}$, расстояние S
 Тогда справедливы уравнения

① $\frac{S}{v_1+5} - \frac{S}{v_2+5} = 1,8$ ② $\frac{S}{v_1-5} - \frac{S}{v_2-5} = 4,5$

Получается система $\begin{cases} \frac{S}{v_1+5} - \frac{S}{v_2+5} = 1,8 \\ \frac{S}{v_1-5} - \frac{S}{v_2-5} = 4,5 \end{cases}$

$\begin{cases} Sv_2 + 5S - Sv_1 - 5S = 1,8v_1v_2 + 9v_2 + 9v_1 + 45 \\ Sv_2 - 5S - Sv_1 + 5S = 4,5v_1v_2 - 22,5v_2 - 22,5v_1 + 112,5 \end{cases}$

$\begin{cases} Sv_2 - Sv_1 = 1,8v_1v_2 + 9v_2 + 9v_1 + 45 \quad ① \\ Sv_2 - Sv_1 = 4,5v_1v_2 - 22,5v_2 - 22,5v_1 + 112,5 \quad ② \end{cases}$

Вычитаем из ② ①

$0 = 2,7v_1v_2 - 31,5v_2 - 31,5v_1 + 67,5$

Выразим v_2

$v_2 = \frac{31,5v_1 - 67,5}{2,7v_1 - 31,5}$

Данное уравнение - функция $y = \frac{1}{x}$ и будет выглядеть так:

Находим асимптоты функции - прямые $x = \frac{31,5}{2,7}$ и $y = \frac{31,5}{2,7}$

$\frac{31,5}{2,7} \approx 11,6(6)$ - значит целые x , которые могут быть, находятся в промежутке $[12; +\infty)$

Ищем.

Таблица подстановки.

| | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|-----|-----|----|--------|----|--------|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|
| x | 12 | 13 | меньше | 15 | меньше | меньше | меньше | меньше | 25 | меньше | меньше | меньше |
| y | 345 | 95 | меньше | 45 | меньше | меньше | меньше | меньше | 25 | меньше | меньше | меньше |

При проверке выяснилось, что в промежутке $[23; +\infty)$ $x > y$, что противоречит условию.

Ответ: возможные пары целых значений скоростей: (в км/ч) (v_1, v_2)

12 и 345; 13 и 95; 15 и 45, 20 и 25.

№2. Асимптоты.

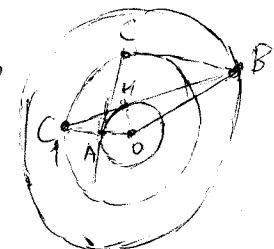
Считаем $\triangle AOB$, h_1, h_2

$OA = r = 100$
 $OB = r + h_1 + h_2$
 $OC = r + h_1$

Ищем критические случаи (границы), тогда покажем, какой диапазон возможных углов подходит к условию.

Точками C и C_1 на рисунке показаны границы множества подходящих точек C . Если выбрать любую точку на внешней окружности, тогда либо CC_1 , либо CA пересекут тангенту.

CA - касательная
 $\angle CAO = 90^\circ$
 $\angle CAO = 90^\circ$ - центр описанной окружности.
 BC_1 - касательная, где высота OH $\triangle OBC_1 = 0$, что нецелесообразно.



Значит условия, есть 2 ограничения $BC_x < BC_1, AC_x \leq AC$

Чистовик

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Продолжение задачи 1/2

if $\gamma AOB \geq 90$ then

begin

$\gamma_{min} := \text{radtodeg}(\arccos(OA/OC));$

// поиск границы

$\gamma_{max} := \text{radtodeg}(\arccos(r/OC) + \arccos(r/OB));$

while $\gamma_{min} < \gamma_{max}$ do

begin

$BC := \sqrt{\text{sqr}(OC) + \text{sqr}(OB) - 2 * OC * OB * \cos(\text{degtorad}(\gamma_{min}))};$

// поиск грани

$AC := \sqrt{\text{sqr}(OA) + \text{sqr}(OC) - 2 * OA * OC * \cos(\text{degtorad}(\gamma AOB - \gamma_{min}))};$

if $BC \leq ka$ then

$t := AC + BC / 10$

else

begin
 $\gamma OBC := \text{radtodeg}(\arccos((\text{sqr}(OB) + \text{sqr}(BC) - \text{sqr}(OC)) / (2 * OB * BC)));$

$OH := OB * \sin(\text{degtorad}(\gamma OBC));$

$CC1 := 2 * (\text{sqr}(OC) - \text{sqr}(OH));$

$BC1 := BC - CC1;$

$t := AC + CC1 + BC1 / 10;$

end;

if $t_{min} > t$ then begin

$t_{min} := t;$

$\gamma_{isk} := \gamma_{min};$

end;

// поиск минимального времени

~~end;~~

$\gamma_{min} := \gamma_{min} + k;$

end;

if $\gamma AOB < 90$ then begin

if $\gamma AOB = 0$ then $t_{min} := H1 + H2 / 10$

~~else~~ else begin ~~while~~ while $(\gamma_{min} + k) < \gamma AOB$ do begin $\gamma_{min} := \gamma_{min} + k;$

$BC := \sqrt{\text{sqr}(OC) + \text{sqr}(OB) - 2 * OC * OB * \cos(\text{degtorad}(\gamma_{min}))};$

~~AC :=~~

if $(\gamma AOB - \gamma_{min}) = 0$ then $AC := H1$

else

$AC := \sqrt{\text{sqr}(OA) + \text{sqr}(OC) - 2 * OA * OC * \cos(\text{degtorad}(\gamma AOB - \gamma_{min}))};$

$t := AC + BC / 10;$

if $t_{min} > t$ then begin $t_{min} := t; \gamma_{isk} := \gamma_{min};$ end;

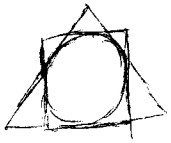
end;

writeLn('Искомый угол BOC =', γ_{isk}); writeLn('Время наименьшее', t_{min});

end.



Задача 1.



~~Для описи~~

Фигуры задаются на координатной плоскости.

Каждая фигура задается по числовой отрезке.

Для окружности задается центр и радиус
через уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$ ^{уравнения} ~~и~~ ^{ее} ~~радиус~~ ^{объем} фигур доказываем