Проделаем подобные преобразования для второго утверждения из условия.

$\frac{ab^3+1}{b-1}=m$, m-целое число

$\frac{b(ab^2+1)}{b-1}=m+1 \Rightarrow \frac{ab^2+1}{b-1}=m_1$, m_1-целое число

$\frac{b(ab+1)}{b-1}=m_1+1 \Rightarrow \frac{ab+1}{b-1}=m_2$, m_2-целое число

$\frac{b(a+1)}{b-1}=m_2+1 \Rightarrow \frac{a+1}{b-1}=q$, q-целое число.

Умножим p на q.

$pq=\frac{b+1}{b-1}$

Очевидно, что $b+1$ делится на $b-1$ только если $b-1\leq 2$. Так как b-натуральное число, оно равно либо 2, либо 3. Из $p=\frac{b+1}{a+1}$ получаем, что если $b=2$, то $a=2$, а если $b=3$, то ~~а равно~~ либо $a=1$, либо $a=3$.

Несложно проверить, что все они удовлетворяют условию.

Ответ: ~~а=3~~ $a=2,\ b=2$

$a=1,\ b=3$

$a=3,\ b=3$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

3944 80

ЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(8-9 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 12.03.2017

****

Вариант 3

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. На празднике по случаю открытия нового футбольного сезона за круглым столом разместились 50 футбольных фанатов: 25 болельщиков команды “Суперорлы” и 25 болельщиков команды “Суперльвы”. Каждый из них заявил: «справа от меня фанат “Суперорлов”». Могло ли среди фанатов “Суперорлов” и фанатов “Суперльвов” быть поровну лжецов?

2. Для любых чисел x, y и z докажите неравенство

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \sqrt{2}(xy+yz).$$

3. Вокруг четырехугольника $ABCD$ описана окружность ω_1. Через точки A и B проведена окружность ω_2, пересекающая луч DB в точке $E \neq B$. Луч CA пересекает окружность ω_2 в точке $F \neq A$. Докажите, что если касательная к окружности ω_1 в точке C параллельна прямой AE, то касательная к окружности ω_2 в точке F параллельна прямой AD.

4. Дан квадратный трехчлен $p(x)=ax^2+bx+c$ с целыми коэффициентами ($a \neq 0$) и такое целое число n, что

$$n < p(n) < p(p(n)) < p(p(p(n))).$$

Докажите, что a положительно.

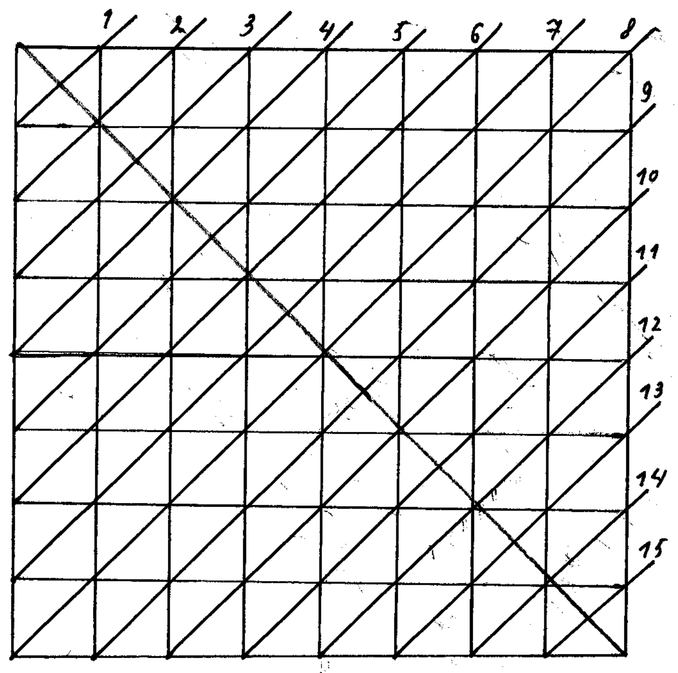
5. Какое наибольшее количество фишек можно расставить в клетках шахматной доски (в каждой клетке не более чем по одной фишке) так, чтобы на каждой диагонали стояло не более трех фишек. (Шахматная доска имеет размеры 8×8).

6. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых a^3b-1 делится на $a+1$ и ab^3+1 делится на $b-1$.

7. Так как они сидят за круглым столом, а фанатов "Суперолов" всего 25, то справа от 25 человек сидят фанаты "Суперорлов", а справа от других 25 - фанаты "суперльвов".
Получается, за столом ровно 25 лжецов, очевидно, что они не могли поровну разделится, вед 25 - нечётное число.
Ответ: нет, не могло.

5. Ответ: 38 фишек.

Рассмотрим тольк диагонали, наклонённые вправо.



Всего их 15. ~~Для удобства~~ пронумеруем их как на рисунке. Ясно, что на даигоналях 1 и 15 можно поставить лиш по одной фишке. На диагоналях 2 и 14 - лишь по две, а на всех остальных. Итого 39 фишек.

Заметим, что диагонали 1, 3, 13 и 15 не могут быть одновременно полностью заполнены, потому что тогда на главной ~~диаг~~ диагонали (выделена карандашом) будет 4 фишки, что противоречит условию. Значит ~~эт~~ лишнюю фишку нужно убрать, тогда наибольшее число ~~в~~ фишек равно 38.

Пример такой расстановки:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0			0		0	0
0	0					0	0
0	0						0
0						0	0
0	0					0	0
0	0		0			0	0
	0	0	0	0	0	0	

6. По условию

$\frac{a^3b-1}{a+1}=n$, n - целое число

$\frac{a^3b-1}{a+1}+1=n+1$

$\frac{a^3b+a}{a+1}=n+1$

$\frac{a(a^2b+1)}{a+1}=n+1$

Очевидно, что a и $a+1$ взаимно простые числа, следовательно a^2b+1 делится на $a+1$.

$\frac{a^2b+1}{a+1}=n_1$, n_1 - целое число

$\frac{a(ab-1)}{a+1}=n_1-1 \Rightarrow \frac{ab-1}{a+1}=n_2$, n_2 - целое число

$\frac{a(b+1)}{a+1}=n_2+1 \Rightarrow \frac{b+1}{a+1}=p$ - целое число

очевидно, что обратное утверждение можно доказать, выполнив те же преобразования в обратном порядке. Следовательно a^3b-1 делится на $a+1$ тогда, и только тогда, когда $b+1$ делится на $a+1$.

Чистовик.

2

2. $x^2+y^2+z^2 \geq \sqrt{2}(xy+yz)$

Если $y=0$, то

$x^2+z^2 \geq 0$

Очевидно, что это всегда верно.

Если $y \neq 0$, то разделим на y^2. Это число неотрицательное, поэтому знак неравенства не поменяется.

$\left(\frac{x}{y}\right)^2+1+\left(\frac{z}{y}\right)^2 \geq \sqrt{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\right)$

Пусть $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{z}{y}$, тогда

$a^2+1+b^2 \geq \sqrt{2}\cancel{\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}\right)}(a+b)$

$a^2-\sqrt{2}a+1 \geq -b^2+\sqrt{2}b$

Левая часть является ~~случаем фун~~ значением функции

$f(x)=x^2-\sqrt{2}x+1$

А правая –

$g(x)=-x^2+\sqrt{2}x$.

Их графиками являются параболы, с общей вершиной $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Ветви первой направлены вверх, а ветви второй вниз, следовательно значение первой всегда $\geq \frac{1}{2}$, а значение второй $\leq \frac{1}{2}$.

Значит неравенство всегда выполняется. $\blacksquare$

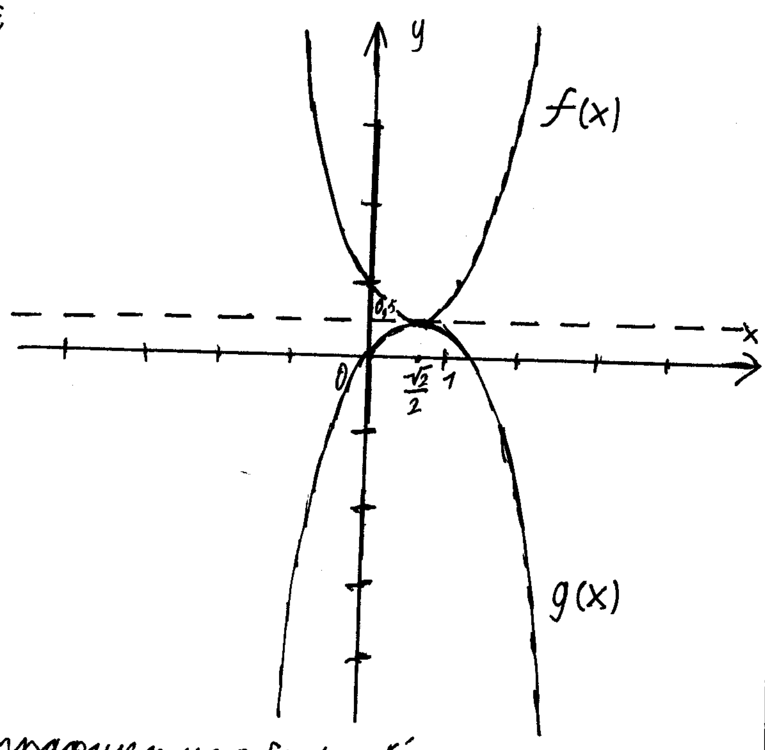


график изображён примерно