Т.е. все ~~выражения~~ произведения такого вида ($\cancel{x}\sin x_k \cdot \cos x_k$) имеют макс. значение, равное $\frac{1}{2}$, при $x_k = \frac{\pi}{4}$. Всего таких ~~выражений~~ произведений одинаковые углы – n.

Теперь рассмотрим остальные попарные произведения (когда sin и cos разных углов)

2) возьмем 2 каких-то угла x_k и x_m

в этой сумме произведений встретятся такие два произведения:

$\sin x_k \cdot \cos x_m + \sin x_m \cdot \cos x_k$

а это равно $\sin(x_k + x_m)$, который достигает своего максимума (1) при $x_k + x_m = \frac{\pi}{2}$ ($\pm 2\pi k$, но это неважно сейчас), и если как и в первом пункте взять их (углы) равными $\frac{\pi}{4}$, то их сумма будет $\frac{\pi}{2}$, отлично.

Для каждого произведения будет находится дополняющее его до синуса суммы углов, т.к. по раскрытию скобочек будет и $\sin x_k \cdot \cos x_m$, и $\sin x_m \cdot \cos x_k$.

Всего таких преобразований (сумм двух произведений) будет $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, т.к. столько будет вариантов попарных сумм разных углов – $x_k + x_m$.

Обобщаем максимальную сумму (когда все углы $= \frac{\pi}{4}$)

$$\underbrace{n \cdot \frac{1}{2}}_{\frac{\sin(2x_k)}{2}} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}_{\sin(x_k + x_m)} = \frac{n}{2}(1 + n - 1) = \frac{n^2}{2}$$

Ответ: $\frac{n^2}{2}$ ✓

+1 лист

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

6768 75

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 12.03.2017

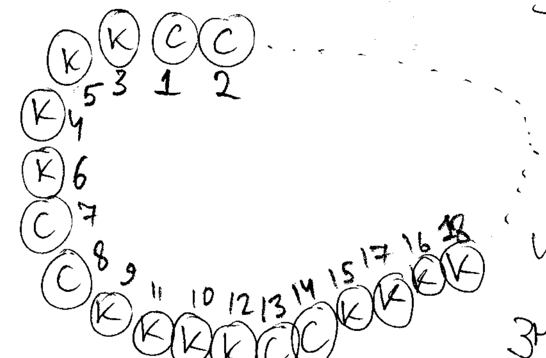
****

Вариант 1

1. Ожерелье состоит из 30 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что с двух сторон от каждой синей бусинки находятся разноцветные бусинки, а через одну от каждой красной — также разноцветные бусинки. Сколько красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну цифру. В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \ldots + \cos x_n).$$
4. На отрезке AB длины 10 как на диаметре построена окружность ω. Через точку A проведена касательная к ω, на которой выбрана точка K. Через точку K проведена прямая, отличная от AK, касающаяся окружности ω в точке C. Высота CH треугольника ABC пересекает отрезок BK в точке L. Найдите площадь треугольника CKL, если известно, что $BH : AH = 1 : 4$.
5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее число коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно трех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 4 и 4, а углы при вершине — $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ и $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

Задача №1.

Попробуем расставить бусинки, начиная с одной синей.



По условию рядом с ней должны стоять бусинки разного цвета, т.е. красная и синяя. Рассмотрим эту красную бусинку. Через одну от нее уже стоит синяя (№2), значит, по другую сторону через одну от нее стоит красная. Между ними тоже стоит красная, т.к. у синей должны быть разноцветные соседи. Для этой красной через одну уже есть синяя (№1), т.е. через одну по другую сторону нужно поставить красную. Для красной №4 и №6. нужно поставить по одной синей через одну от них. У этих синих по бокам должны быть красные для выполнения условия, потому что они стоят подряд. Дальше нужно делать все то же самое — для №9 через одну красную, между ними красную и т.д. Таким образом, бусинки будут следовать так: 2 синие, 4 красные, 2 синие, 4 красные и т.д., т.е. на каждые 2 синие приходится 4 красных бусинки, а т.к. они стоят по кругу (т.е. цепь замкнута), то таких циклов будет целое число — 15. Т.е. красных будет $15 \cdot 4 = 30 \cdot 2 = 60$. Другой расстановки быть не может, т.к. мы ставили все бусинки чисто по условию и там не было других вариантов в процессе расстановки.

Ответ: 60

Задача №5.

Рассмотрим, сколько коней из каждой клетки можно бить:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Таким образом, на поле сейчас 8 "неподходящих" коней (они обведены), для которых нужно убрать (т.к. добавить нельзя) каких-то коней, чтобы они били меньшее кол-во коней

Рассмотрим один угол доски. У обоих неудачных коней есть один "общий" конь — которого бьют и тот, и другой, и по два коня, которых они бьют в одиночку. До остальных неудачных коней слишком большое расстояние (минимум 4 клетки), поэтому у них нет "общих" коней с другими углами. Значит, самый экономный способ — в каждом углу убрать "общего" коня. Но не появятся ли при этом новые неудачные кони, для которых снова придется удалять коней? Рассмотрим:

(эта угловая клетка)

2	2	4	3	
2	4	6	6	
4	6	X	8	
3	6	8	8	

☒ — отмечен удаленный "общий" конь

посчитаем теперь кол-во битых коней для каждой клетки:

Появились две новые неудачные клетки в каждом углу.

И в поле нет таких 3 или более клеток, для которых можно было бы удалить одну общую клетку, поэтому снова минимально можно удалить по клетке на каждые два неуд. коня, т.е. уже суммарно 8 клеток удалено.

И столько же будет удалено, если изначально для каждого удалять по одному не "общему" коню. Вот пример:

2	2	X	4	4	X	2	2
2	4	5	5	5	5	4	2
X	5	8	7	7	8	5	X
4	5	7	8	8	7	5	4
4	5	7	8	8	7	5	4
X	5	8	7	7	8	5	X
2	4	5	5	5	5	4	2
2	2	X	4	4	X	2	2

☒ — удаленные

Ни одной 3.

Подходит.

Ответ: 8.

Задача №3

$A = (\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n)$ | $x_1, x_2 \ldots x_n$ — вещ. числа

$A = (\sin x_1 \cdot \cos x_1 + \sin x_2 \cdot \cos x_2 + \ldots \sin x_n \cdot \cos x_n) + (\sin x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_2 \cdot \cos x_1 + \sin x_1 \cdot \cos x_3 + \sin x_3 \cdot \cos x_1 + \ldots)$

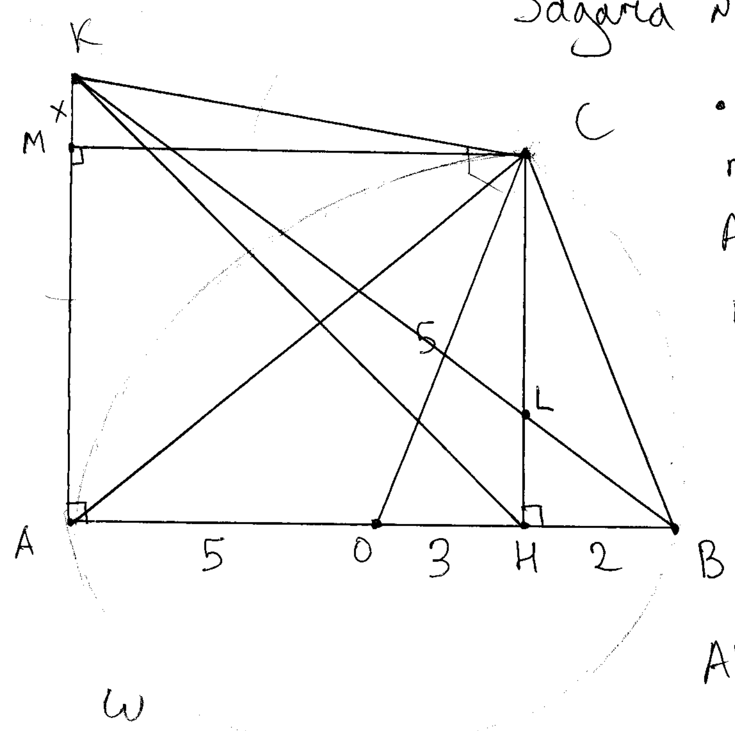
Преобразуем все эти попарные произведения в упрощ. формулы и рассмотрим их максимумы.

1) $\sin x_k \cdot \cos x_k = \dfrac{\sin(2x_k)}{2}$

$\max \sin(2x_k) = 1$, это при $x_k = \frac{\pi}{4} \pm 2\pi k$. (возьмём просто $\frac{\pi}{4}$)

Чистовик

Задача №4.



$CH \perp AB$ (усл.)

• O — центр окружности, поэтому $AO = BO = \frac{10}{2} = 5$

AK — касательная, поэтому $AK \perp AB$

$BH : AH = 1:4 \Rightarrow BH = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$

$AH = 8$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow OH = 5 - BH = 3.$

$CH = \sqrt{CO^2 - OH^2} = \sqrt{25-9} = 4$

$AK = CK$ (как отрезки касательных из одной точки).

$CH \parallel AK$, т.к. оба отрезка $\perp AB$.

Проведем CM, $CM \perp AK$.

$AHCM$ — прямоугольник (по построению). $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH = CM = 5$

$AM = CH = 8.$

Обозначим KM за x.

$KC^2 = KM^2 + CM^2 = AK^2$

$AK = 4 + x$

$(x+4)^2 = x^2 + 8^2$

$8x = 9$

$x = 1\frac{1}{8}$

$AK = CK = 1\frac{1}{8} + 4 = 5\frac{1}{8} = \frac{41}{8}$

$KH^2 = \underbrace{8^2}_{(AH)^2} + \underbrace{\left(5\frac{1}{8}\right)^2}_{(AK)^2}$

по теор. косинусов $KH^2 = CH^2 + KC^2 - 2CH \cdot KC \cdot \cos\angle KCH$

$8^2 + \left(5\frac{1}{8}\right)^2 = 4^2 + \left(5\frac{1}{8}\right)^2 - 2 \cdot 5\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot \cos\angle KCH$

$48 = -41 \cdot \cos\angle KCH$

$$x^2+8x+16=x^2+64$$

$$8x=48$$

$$x=6$$

$$AK=CK=4+6=10$$

$$KH^2=\underbrace{10^2}_{(AK)^2}+\underbrace{8^2}_{(AH^2)}$$

по теор. косинусов

$$KH^2=CH^2+CK^2-2CH\cdot CK\cdot\cos\angle KCH$$

$$\cancel{10^2}+8^2=4^2+\cancel{10^2}-2\cdot10\cdot4\cdot\cos\angle KCH$$

$$48=80\cdot\cos\angle KCH$$

$$\cos\angle KCH=\frac{48}{80}=\frac{3}{5}$$

$$\sin\angle KCH=\frac{4}{5}$$

$\triangle HLB \sim \triangle KAB$ (прямой угол и угол между секущей KB и парал. прямыми CH и AK)

$$k=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=\frac{HB}{AB}$$

$$LH=\frac{1}{5}\cdot\underbrace{10}_{AK}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CL=2$$

$$S_{\triangle KCL}=\frac{1}{2}\cdot CL\cdot KC\cdot\sin\angle KCH=\frac{1}{2}\cdot10\cdot2\cdot\frac{4}{5}=8$$

Ответ: 8