$\Leftrightarrow \sqrt{|OA|^2-(|OB|-|BH|)^2} = \sqrt{5^2-(5-2)^2} = 4$

$|AO|=|OC|$ - радиусы

$|OH| = |OB| - |BH|$

$S_{AKCH} = |AH|\cdot\frac{|CH|+|AK|}{2}$

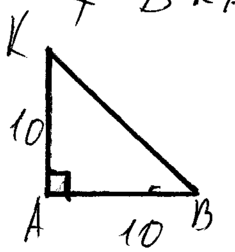
$S_{AKCH} = S_{AKCO} + S_{CHO} = 2S_{AKO} + S_{CHO} = |AK|\cdot|AO| + \frac{|CH|\cdot|OH|}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |AH|\cdot|AK| + |AH|\cdot|CH| = 2|AK|\cdot|AO| + |CH|\cdot|OH| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\cdot|AK| + 8\cdot 4 = 10|AK| + 4\cdot 3 \Leftrightarrow$

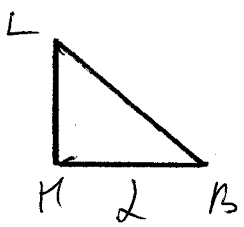
$\Leftrightarrow 2\cdot|AK| = 4\cdot 5 \Leftrightarrow |AK| = 10$

∢ ΔKAB. Он прямоугольный $((AK)\perp(AB))$



$\widehat{KBA} = \mathrm{arctg}\,\frac{10}{10} = 45^0$

∢ LHB. Он прямоугольный $((CH)\perp(AB))$



$|LH| = \mathrm{tg}\,\widehat{KBA}\cdot|HB| = 1\cdot 2 = 2$

$(AK)\parallel(CH)$, $(AK)\perp(HB)$ $\Rightarrow$ $AKLH$ - прямоугольная трапеция

$S_{CKL} = S_{AKCH} - S_{AKLH} = |AH|\frac{|AK|+|CH|}{2} - |AH|\frac{|AK|+|LH|}{2} =$

$= \frac{8}{2}((10+4)-(10+2)) = 4\cdot 2 = 8$

Ответ: $S_{CKL} = 8$ ✓

6584 85

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 12.03.2017

****

Вариант 1

1. Ожерелье состоит из 30 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что с двух сторон от каждой синей бусинки находятся разноцветные бусинки, а через одну от каждой красной — также разноцветные бусинки. Сколько красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)

2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну цифру. В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.

3. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)\cdot(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n).$$

4. На отрезке AB длины 10 как на диаметре построена окружность ω. Через точку A проведена касательная к ω, на которой выбрана точка K. Через точку K проведена прямая, отличная от AK, касающаяся окружности ω в точке C. Высота CH треугольника ABC пересекает отрезок BK в точке L. Найдите площадь треугольника CKL, если известно, что $BH : AH = 1 : 4$.

5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее число коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно трех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)

6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 4 и 4, а углы при вершине — $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$, $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{9}{11}$ и $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{9}{11}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

③

$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)\cdot(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} (\sin x_i \cos x_j + \sin x_j \cos x_i) =$

$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \sin(x_i + x_j) \overset{(*)}{\le}$

$\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \frac{1}{2}\cdot C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 1 =$

$= \frac{1}{2}\cdot n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 1 = \frac{n}{2}(1 + n - 1) = \frac{n^2}{2}$

(*) Равенство достигается, например, в случае, где:

$\forall i \in [1;n] \cap \mathbb{N}$ $x_i = \frac{\pi}{4}$. Тогда: $\forall i,j \in [1;n] \cap \mathbb{N}$ $\sin 2x_i = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\sin(x_i + x_j) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

(синус — ограниченная функция;

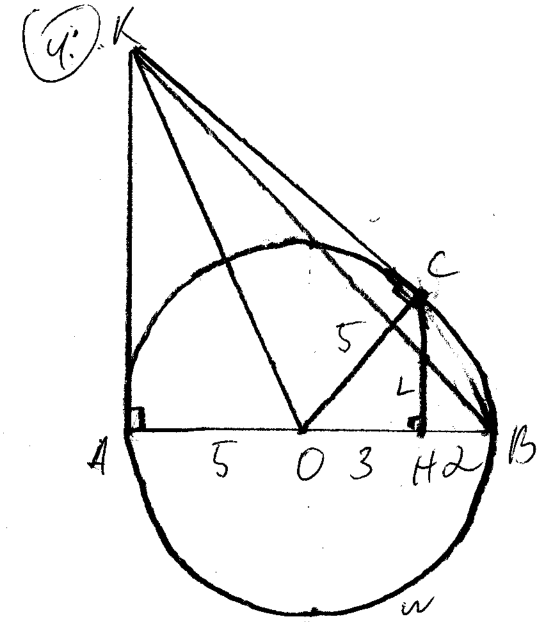
$\forall c \in \mathbb{R}$ $\sin c \le 1$; $\sin c = 1 \Leftrightarrow c \in \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$)

Ответ: максимальное значение A — $\frac{n^2}{2}$.

Это значение достигается, например, в случае, где:

$\forall i \in [1;n] \cap \mathbb{N}$ $x_i = \frac{\pi}{4}$

④



Дано:

$|AB| = 10$

$[AB]$ — диаметр ω

$(AK) \perp (AB)$

C; (KC) — касательная к ω и $C \ne A$

$[CH]$ — высота в $\triangle A\cancel{K}CB$

$\frac{|AH|}{|HB|} = \frac{4}{1}$

$[CH] \cap [KB] = L$

Найти:

S_{KCL}

Решение:

$\exists\, O$ — центр ω

Тогда:

(KC) — касательная к ω $\Rightarrow (KC) \perp (OC)$

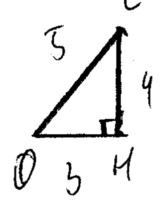
$[CH]$ — высота в $\triangle ACB \Rightarrow (CH) \perp (AB)$; $(AK) \perp (AB)$ $\Rightarrow$ ~~AKCH — трапеция~~ $(AK) \perp (AH)$; $(AK) \parallel (CH)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow AKCH$ — трапеция, прямоугольная

$|AK| = |KC|$ — отрезки касательных; $|AO| = |OC|$ — радиусы; $[KO]$ — общая $\Rightarrow \triangle AKO = \triangle KCO \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AKO} = S_{KCO}$; $S_{AKCO} = S_{AKO} + S_{KCO}$ $\Rightarrow S_{AKCO} = 2S_{AKO}$

$\exists\, \triangle OCH$. Он прямоугольный ($(CH) \perp (AB)$)



$|CH| = \sqrt{|OC|^2 - |OH|^2} \ominus$

$\frac{|AH|}{|HB|} = \frac{4}{1}$; $|AH| + |HB| = |AB|$ $\Rightarrow \begin{cases} |AH| = 8 \\ |HB| = 2 \end{cases}$

$|AO| = |OB|$ — радиусы; $|AO| + |OB| = |AB|$ $\Rightarrow |AO| = |OB| = 5$

Чистовик. Вариант 1.

(2.) Пусть изначальное число имеет вид $\overline{a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n}$. Из условия понятно, что $n \geq 2$. Пусть мы убираем a_i из числа. Тогда:

$$\overline{a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n} = 6\, \overline{a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1(10^{n-1} - 10^{n-2}) + \ldots + a_{i-1}(10^{n-(i-1)} - 10^{n-i}) + a_i \cdot 10^{n-i} = 5\,(a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{i-1} \cdot 10^{n-i} + a_{i+1} \cdot 10^{n-i-1} + \ldots + a_n 10^{n-n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\,(a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{i-1} \cdot 10^{n-i}) + a_i \cdot 10^{n-i} = 5\,(a_{i+1} \cdot 10^{n-i-1} + \ldots + a_n \cdot 10^{n-n}).$$

Заметим, что $a_{i+1} \cdot 10^{n-i-1} + \ldots + a_n \cdot 10^{n-n} < 10^{n-i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5(a_{i+1} \cdot 10^{n-i-1} + \ldots + a_n \cdot 10^{n-n}) < 5 \cdot 10^{n-i}$$

$\exists\, i \neq 1$. Тогда:

$$4(a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{i-1} \cdot 10^{n-i}) + a_i \cdot 10^{n-i} \geq$$
$$\geq 4a_{i-1} \cdot 10^{n-i} + a_i \cdot 10^{n-1} \geq 5 \cdot 10^{n-i}$$

Значит $i = 1$.

?

Получаем:

$$a_1 \cdot 10^{n-1} = 5\,(a_{1+1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n \cdot 10^0) \quad (*)$$

$a_n \neq 0$ по условию $\Rightarrow 5a_n \,\vdots\, 10^k,\ k \in \{0; 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n) \,\vdots\, 10^k,\ k \in \{0; 1\}$ (#)

$a_1 \cdot 10^{n-1} \vdots 10^{n-1} \underset{(*)}{\overset{(\#)}{\Rightarrow}}$ ~~…~~ $\left.\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=1 \end{array}\right. \\ n \geq 2 \text{ (по условию)}\end{array}\right| \Rightarrow n=2$

Получаем:

$a_1 \cdot 10 = 5 \cdot a_2 \Leftrightarrow a_2 = 2a_1$. По условию $a_2 \neq 0$, $a_2 \leq 9$, $a_1 \geq 1$. Значит искомые числа, это: 12; 24; 36; 48.

Ответ: 12; 24; 36; 48.

(1). Посмотрим синюю бусинку. У неё разноцветные соседи. Не умаляя общности, пусть правая будет красной, а левая — синей:

(к) (с) (с)

У крайней бусинки тоже должны быть разноцветные соседи, значит будет так:

(к) (с) (с) (к)

Посмотрим на правую красную бусинку. У неё через один — разноцветные соседи. Тогда:

(к) (с) (с) (к) _ (к).

На месте пропуска не может быть синей бусинки (у неё должны быть разноцветные соседи), значит там красная:

(к) (с) (с) (к) (к) (к).

Для второй с права бусинки (красной) должно быть справедливо условие. Тогда получим:

(к) (с) (с) (к) (к) (к) (к)

Теперь для второй с правого края рассматриваемого участка бусинки (снова красной) должно быть

Чистовик. Вариант 1.

выполнено условие. Тогда получаем:

к с с к к к к с

Для крайнего справа синего шарика тоже должно выполняться условие. Тогда мы увидим:

к с с к к к к с с.

Мы начали строить ~~ценоч~~ цепочку с к с с. Получили к с с к к к к с с. Мы никак не пользовались тем, что находится слева от рассматриваемой цепочки. А на конце справа мы снова получили к с с. Значит всё ожерелье на участки следующего вида (так как оно замкнутое): {к с с к к к} (здесь 2 синих и 4 красных бусины). Тогда количество красных бусинок в ожерелье равно: $30 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 60$.

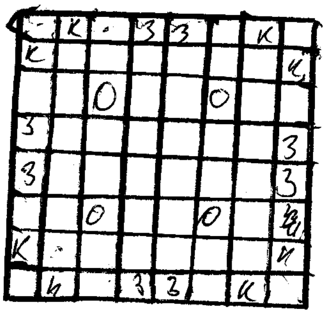
Ответ: 60 красных бусинок.

5. Ответ: 8 коней. Пример:

K	K	■	K	K	■	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K
■	K	K	K	K	K	K	■
K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K
■	K	K	K	K	K	K	■
K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	■	K	K	■	K	K

к - оставшиеся кони
■ - убранные кони

Оценка: ~~К~~ ~~Изна~~ Изначально на доске есть ровно 8 коней которые бьют по 3-м другим коням. (рис. 1).



К – кони, которые изначально бьют по три других коня.
О – общие клетки, которые бьют к
З – кони, которые после удаления коня из О в той же четверти, начинают бить по 3 клетки.

У этих коней есть общая клетка (конь), ~~для бытья~~ которую они бьют. Если мы уберём ≤ 7 коней, то мы должны были убрать такого коня (хотя бы одного). Тогда в каждой четверти доски появятся два коня, которые бьют ровно 3-х других коней. Заметим, что пересечения в битых конях, есть только у тех коней типа З, которые находятся в одной четверти. Тогда потребуется убрать хотя бы ещё одного коня для каждой пары типа З в тех четвертях, в которых были убраны кони типа О. А если конь типа О не был убран, то придётся убрать по одному коня для каждого коня типа к. (Кони типа к не бьют друг друга). В любом случае получаем, что необходимо убрать как минимум 8 коней с доски.
Пример приведён с другой стороны ~~…~~ этого листа.

Ответ: 8 коней.

6. Дано:
$r_1 = 1$
$r_2 = r_3 =$
$\alpha = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$
$\beta_1 = \beta_2 = 4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$
Найти:
r.