$5m = 10^{n-1}(y+4p)$

$m = 5^{n-2}\cdot 2^{n-1}(y+4p)$

$n-2=0$, т.к. m не оканчивается на 0

$n=2$ $\boxed{y}$ $\boxed{m}$, m тоже цифра

$m = 2(y+4p)$

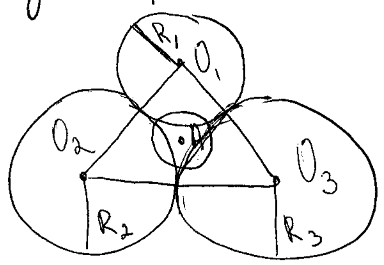
$m = 2y+8p$, $p<2$

если $p=1$, то $y=0$ и $m=8 \longrightarrow 108$

если $p=0$, то $y=1,2,3,4$ 5 – уже не подходит, т.к. $m\neq 10$

Ответ: 12, 24, 36, 48, 108.

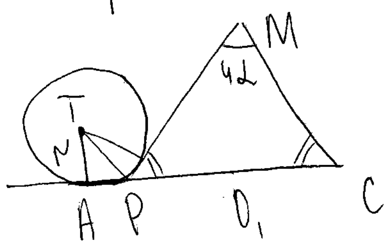
6. радиус шара – ?



O_1; O_2; O_3 – центры конусов

A – точка касания шара с плоскостью

Построим сечение через центр шара и ось конуса:



T-(точка) центр шара

r – искомый радиус шара

$\angle PMC = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \alpha$, тогда $\angle PMC - 4\alpha$

$\angle MPC = \frac{180^\circ - 4\alpha}{2} = 90^\circ - 2\alpha$ (т.к. ΔPMC – р/б)

$\angle APM = 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ + 2\alpha$

PT – биссект. $\Rightarrow \angle APT = \frac{90^\circ+2\alpha}{2} = \alpha + 45^\circ$

ΔAPT – прям., $AT - r$; $AP = \frac{r}{\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)}$

$\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+1}{1-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$

1

2996 80

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Дата 12.03.2017

****

Вариант 1

1. Ожерелье состоит из 30 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что с двух сторон от каждой синей бусинки находятся разноцветные бусинки, а через одну от каждой красной — также разноцветные бусинки. Сколько красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну цифру. В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)\cdot(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n).$$
4. На отрезке AB длины 10 как на диаметре построена окружность ω. Через точку A проведена касательная к ω, на которой выбрана точка K. Через точку K проведена прямая, отличная от AK, касающаяся окружности ω в точке C. Высота CH треугольника ABC пересекает отрезок BK в точке L. Найдите площадь треугольника CKL, если известно, что $BH : AH = 1 : 4$.
5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее число коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно трех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 4 и 4, а углы при вершине — $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ и $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

1. ~~КСК~~
~~ССС~~ } противоречит условию

К С С
С С К

К ... К ... С
С ... К ... К

Син. бусинки встреч. парами, разделен. некоторым количеством красных бусинок

... ССКСС - не подходит, т.к через одну от каждой красной бусин. должны быть разноцветные бусинки

... ССККСС - не подходит по той же причине

... СС<u>К</u>ККСС - не подходит; подчеркнутая Красн. бусинка имеет через одну одноцветных ~~соседей~~ соседей, а это противор. условию

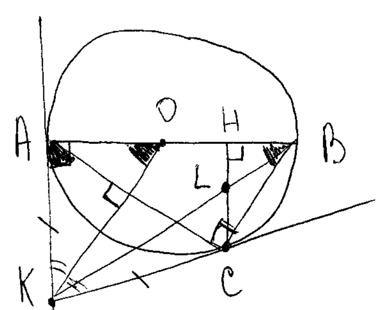
... ССККККСС - подходит, у каждой красной бусинки через одну располож. разноцветные ~~бусинки~~ бусинки.

... ССКК<u>К</u>ККСС - опять не подходит

Дальше аналогично. Ожерелье состоит из чередующихся блоков по 2 син. и 4 красных бусинки. По условию мы знаем, что синих бусинок 30. Красных в 2 раза больше, значит $2\cdot 30 = 60$

Ответ: 60.

4. S_{CKL} - ?



По условию $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{4}$; $AB = 10$, тогда $BH = 2$, а $AH = 8$

Т.к. $\triangle ABC$ - прям ($\angle ACB = \frac{1}{2}\cup AB$; $\cup AB = 180°$), то $CH = \sqrt{AH\cdot BH} = \sqrt{2\cdot 8} = 4$

$\triangle AKO$ - прям., O - центр окружности; ~~$AO\perp AK$~~ $OA \perp AK$

$\triangle BCH$ - прям., $BH \perp CH$

$\angle ABC - \alpha$

$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC = \angle KAC$ ($\angle$ между касат. и хордой) $= \alpha$

$\triangle KAC$ - р/б ($AK = KC$, как отрезки касательных); KO - биссект. $\angle AKC$, и высота $\triangle AKC$ $\Rightarrow \angle AKO = 90° - \alpha \Rightarrow \angle AOK = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

Следовательно, $\triangle AOK \sim \triangle HBC$ по двум углам ($\angle AOK = \angle HBC = \alpha$, $\angle OAK = \angle BHC = 90°$)

$AO = \frac{1}{2}AB$, т.к. O - центр окружности

$\frac{AO}{AK} = \frac{BH}{HC} \Rightarrow AK = \frac{AO\cdot HC}{BH} = \frac{5\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} = 10$ $\qquad AO = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\triangle ABK \sim \triangle HBL$ по двум углам ($\angle ABK$ - общий, $\angle BAK = \angle BHL = 90°$)

$\frac{AB}{AK} = \frac{BH}{HL} \Rightarrow HL = \frac{AK\cdot BH}{AB} = \frac{\cancel{10}\cdot 2}{\cancel{10}_{1}} = 2$

$CH = CL + LH$; $CL = CH - LH$

$CL = 4 - 2 = 2$

$AK \parallel CH$, расстояние от K до CL - это расстояние между прямыми, т.е AH

$S_{CKL} = \frac{1}{2}CL\cdot AH = \frac{1}{2}2\cdot 8 = 8$

Ответ: 8 ✓

№2.

$\underbrace{ШШШ\ldots ШШ}_{p}\ \underset{n\text{-м месте}}{У}\ \underbrace{ШШШ\ldots Ш}_{m}$

$m + y\cdot 10^{n-1} + p\cdot 10^{n}$

y - стерли, тогда $m + p\cdot 10^{n-1}$

$m + y\cdot 10^{n-1} + p\cdot 10^{n} = 6(m + p\cdot 10^{n-1})$

$5m = y\cdot 10^{n-1} + p\cdot 10^{n} - 6p\cdot 10^{n-1}$

$5m = y\cdot 10^{n-1} + 10p\cdot 10^{n-1} - 6p\cdot 10^{n-1}$

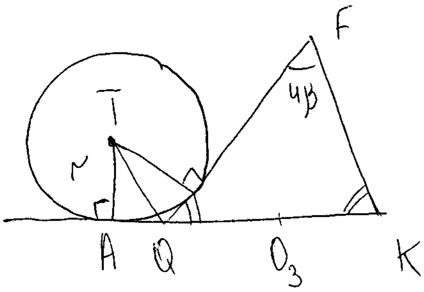
$5m = y\cdot 10^{n-1} + 4p\cdot 10^{n-1}$

$AP = \frac{r}{2}$; $PO_1 = R_1 = 1 \Rightarrow AO_1 = \frac{r}{2} + 1$

Чистовик

2

Построим еще одно сечение:



$\angle QFK = 4\,\mathrm{arctg}\frac{9}{11}$, $\mathrm{arctg}\frac{9}{11} - \beta \Rightarrow \angle QFK = 4\beta$

$\triangle QFK$ - р/б, тогда $\angle FQK = \frac{180^\circ - 4\beta}{2} = 90^\circ - 2\beta$

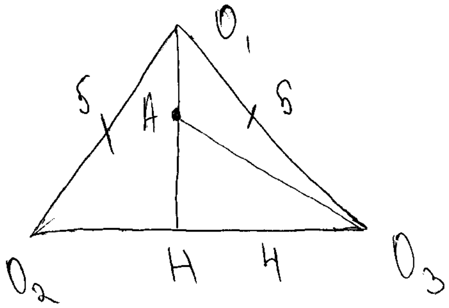
$\angle AQF = 180^\circ - (90^\circ - 2\beta) = 90^\circ + 2\beta$

QT - биссектр. $\Rightarrow \angle AQT = \frac{90^\circ + 2\beta}{2} = \beta + 45^\circ$

$\triangle AQT$ - прям; $AT - r$; $AQ = \frac{r}{\mathrm{tg}(\beta + 45^\circ)}$

$\mathrm{tg}(\beta + 45^\circ) = \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{9}{11} + 45^\circ\right) = \frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{arctg}\frac{9}{11} + 1}{1 - \mathrm{tg}\,\mathrm{arctg}\frac{9}{11}} = \frac{\frac{20}{11}}{\frac{2}{11}} = 10$

$AQ = \frac{r}{10}$; $QO_3 = R_3 = 4 \Rightarrow AO_3 = \frac{r}{10} + 4$



$$\left.\begin{aligned} &O_1O_3 = R_1 + R_3 \\ &O_1O_2 = R_1 + R_2 \\ &R_2 = R_3 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle O_1O_2O_3 \text{ - р/б, } O_1O_3 = O_1O_2$$

O_1H - мед. и высот. и бис.

$O_1O_3 = 5$

$O_2O_3 = R_2 + R_3 = 8$; $HO_3 = \frac{8}{2} = 4$

O_1H - высота в $\triangle O_1O_2O_3$, сл-но,

$O_1H = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ (по Т. Пифагора)

$AH = \sqrt{\left(\frac{r}{10} + 4\right)^2 - 16}$

$\sqrt{\left(\frac{r}{10} + 4\right)^2 - 16} + \frac{r}{2} + 1 = 3$

$\sqrt{\left(\frac{r}{10} + 4\right)^2 - 16} = 2 - \frac{r}{2}$

$2 - \frac{r}{2} \geqslant 0$; $r \leqslant 4$

$\left(\frac{r}{10}+4\right)^2 - 16 = 4 - 2\cdot\frac{\cancel{2}^{1} r}{\cancel{2}_{1}} + \frac{r^2}{4}$

$\frac{r^2}{100} + \frac{8r}{10} + \cancel{16} - \cancel{16} = 4 - 2r + \frac{r^2}{4} \quad |\cdot 100$

$r^2 + 80r = 400 - 200r + 25r^2$

$24r^2 - 280r + 400 = 0 \quad |:4$

$6r^2 - 70r + 100 = 0 \quad |:2$

$3r^2 - 35r + 50 = 0$

$D = 1225 - 600 = 625$

$r = \frac{35 \pm 25}{6}$

$r = \frac{60}{6}$ (не удовлетворяет $r < 4$)

$r = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{6}_{3}}$

Ответ: $\frac{5}{3}$ V

$$\begin{array}{r} \times\ 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105\ \ \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 12 \\ 50 \\ \hline 600 \end{array}$$