$4000a + 400b + 40c + 4d + e = 0$ ∅

• $10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 6(1000a + 100b + 10c + e)$

$4000a + 400b + 40c + 10d = 5e$

∅

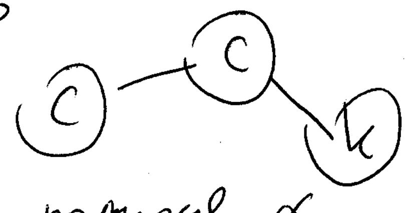
и т.д.

рассматривать больше числа нет смысла?

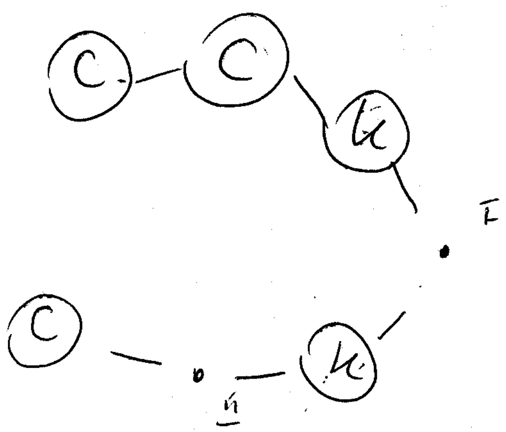
т.к. $a, b, c, d, e, \ldots k \geq 10$

Ответ: $\{12; 24; 36; 48; 108\}$

1) т.к. от каждой синей бусинки расположены разноцветные бусинки, то

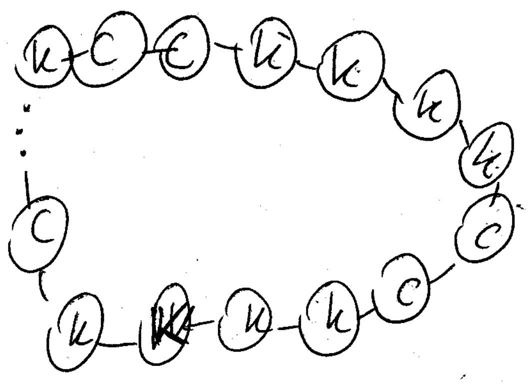


т.к. через 1 от красной разноцв. бусинки, то



на месте I. может стоять только красная бусинка, иначе по соседству от синей будут стоять одноцв. бусинки

на II. тоже красная бусинка, иначе через одну от красной будут одноцветные бусинки



т.е. на каждые 2 синие бусины приходится 2 красных => всего понадобится 60 красных бусин

5 стр. Ответ: 60

+1 лист

Выход: $13^{19} - 13^{23}$, $14^{55} - 14^{57}$

БУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

9408 70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

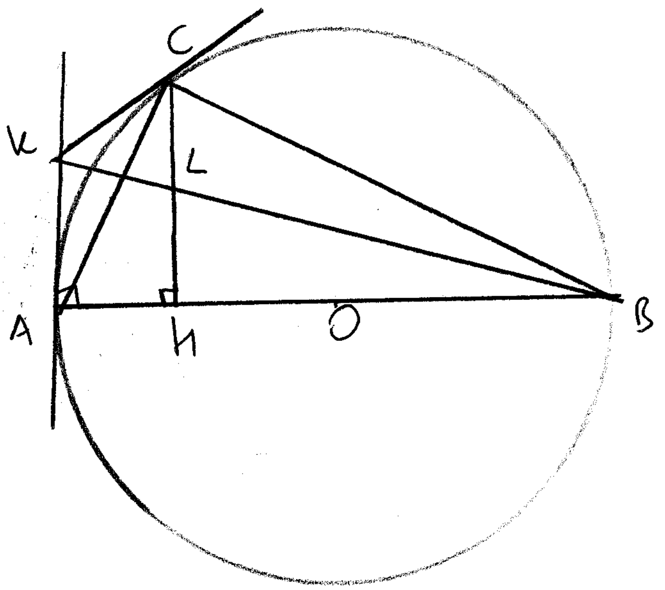
Дата 12.03.2017

****

Вариант 1

1. Ожерелье состоит из 30 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что с двух сторон от каждой синей бусинки находятся разноцветные бусинки, а через одну от каждой красной — также разноцветные бусинки. Сколько красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну цифру. В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \ldots + \cos x_n).$$
4. На отрезке AB длины 10 как на диаметре построена окружность ω. Через точку A проведена касательная к ω, на которой выбрана точка K. Через точку K проведена прямая, отличная от AK, касающаяся окружности ω в точке C. Высота CH треугольника ABC пересекает отрезок BK в точке L. Найдите площадь треугольника CKL, если известно, что $BH : AH = 1 : 4$.
5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее число коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно трех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 4 и 4, а углы при вершине — $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ и $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

II случай (задача 4)



~~из I случая:~~

~~$AC = 2\sqrt{5}$~~

II случай невозможен т.к. по условию

$$\frac{BH}{AH} = \frac{1}{4}$$

а в этом случае

$$AH < BH \Rightarrow \frac{BH}{AH} > 1$$

② рассмотрим двузначные числа:

$\overline{ab} = 10a+b$; $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{N}$

если стереть 1 цифру по значению

или a или b получим: $\left[\begin{array}{l} 10a+b = 6a \\ 10a+b = 6b \end{array}\right.$; $b = -4a$ $\varnothing$; $10a = 5b$; $\underline{2a = b}$

т.е. это числа вида: 12, 24, 36, 48,

рассмотрим трехзначные числа:

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $c \neq 0$ $\quad a, c \in \mathbb{N}$ $\quad b \in \mathbb{Z}$ $\quad \underline{a, b, c \leq 9}$

1) $100a + 10b + c = 6(10a + c)$

$100a + 10b + c = 60a + 6c$

$40a + 10b = 5c \quad |:5$

$8a + 2b = c$

т.е. т.к. $c \leq 9 \Rightarrow$ $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \\ c = 8 \end{cases}$ число 108

2) $100a + 10b + c = 6(10a + b)$

$40a + 4b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ $\varnothing$

3) $100a + 10b + c = 6(10b + c)$

$100a + 10b + c = 60b + 6c$

$100a = 50b + 5c \quad |:5$

$\underset{\vdots 4}{20a} = \underset{\vdots 4}{10b} + c \Rightarrow c$ — четное число, кратное 10 но $c < 10 \Rightarrow \varnothing$

рассмотрим четырехзначные числа:

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, $d \neq 0$

- $1000a + 100b + 10c + d = 6(100a + 10b + c)$

  $400a + 40b + 4c + d = 0$ $\quad \varnothing$

- $1000a + 100b + 10c + d = 6(100a + 10b + d)$

  $400a + 40b + 10c = 6d$

  т.к. $a \neq 0 \Rightarrow$ мин. число $400 = 6d$, но $d \leq 9 \Rightarrow \varnothing$

- $1000a + 100b + 10c + d = 6(100a + 10c + d)$

  $400a + 100b = 5d + 50c \quad |:5$

  $\underset{\vdots 10}{80a} + \underset{\vdots 10}{20b} = d + \underset{\vdots 10}{10c} \Rightarrow d \vdots 10$ $\quad \varnothing$

- $1000a + 100b + 10c + d = 6(100b + 10c + d)$

  $1000a = 500b + 50c + 5d \quad |:5$

  $200a = 100b + 10c + d$ т.к. $d \neq 0 \Rightarrow \varnothing$

рассмотрим пятизначные числа:

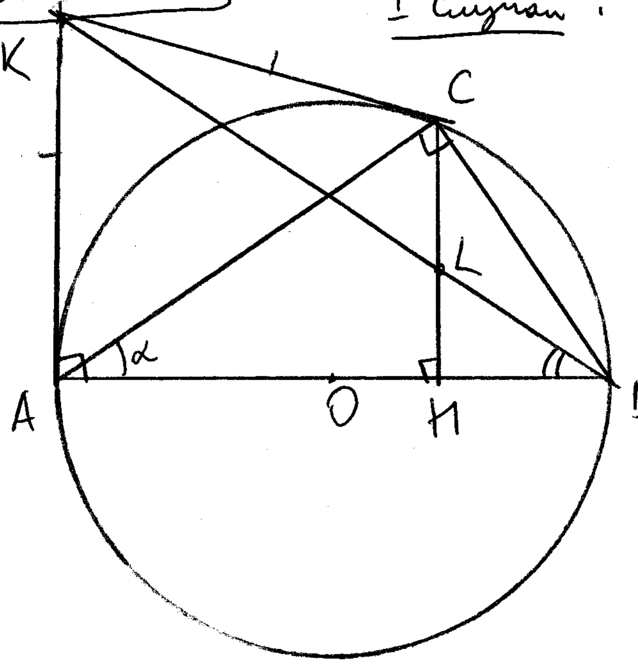
$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$

- $10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 6(1000a + 100b + 10c + d)$

Чистовик

I случай:

4



Дано: Окр. $\omega(O; r)$

$r=5$

$AB=10$

AK - касат.

KC - касательная

CH - высота $\triangle ABC$

$CH \cap BK = L$

$\frac{BH}{AH} = \frac{1}{4}$

Найти: $S_{\triangle CKL}$

Решение:

1) т.к. $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{4} \Rightarrow AH = 4BH$
$AB = AH + BH$ $\Rightarrow$ $5BH = AB$
$5BH = 10$
$BH = 2 \Rightarrow AH = 8$

2) $\triangle ABC$ - п/уг
CH - высота, опущ. на гипотенузу $\Rightarrow CH = \sqrt{AH \cdot HB} = 4$ (по теореме о высоте опущенной из прямого угла)

3) $\triangle ACH$: $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$ (по теореме Пифагора)

4) $\triangle CHB$: $CB = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ (по т. Пифагора)

5) $AK \perp AB$ (по теореме о касательной к радиусу)

6) $AK = KC$ (по теореме о 2ух касательных из 1 точки)

7) $\triangle ACH$: $\exists \angle CAH = \alpha$
$\sin\alpha = \frac{CH}{AC}$ (по опред. синуса)
$\sin\alpha = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

8) $\angle KAC = \angle KAB - \angle CAB = 90° - \alpha$

9) $\exists KC = AK = x$
$\triangle AKC$: $KC^2 = AK^2 + AC^2 - 2AK \cdot AC \cdot \cos\angle KAC$ (по теореме косинусов)
$\cancel{x^2 = x^2}$ $\cos\angle KAC = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1стр

(продолжение 4)

Чистовик

т.е. $\cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 80 - 2x \cdot 4\cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$x = 10 \Rightarrow AK = KC = 10$

10) т.к. $\begin{cases} \angle KAB = \angle LHB = 90^\circ \\ \angle KBA = \angle LBH \text{ (общий угол)} \end{cases} \Rightarrow \triangle LHB \sim \triangle ABK$ (по I признаку подобия $\triangle$)

$\Rightarrow \frac{LH}{AK} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow LH = \frac{AK \cdot BH}{AB} = \frac{\cancel{10} \cdot 2}{\cancel{10}} = 2$

11) т.к. $LH = HB = 2 \Rightarrow \triangle LHB$ — р/б $\triangle$ (по опред.) $\Rightarrow$

$\angle BLH = \angle LBH$ (по св-ву р/б $\triangle$)

$2\angle BLH = 180^\circ - \angle LHB$ (по теореме о сумме углов в $\triangle$)

$\angle BLH = 45^\circ$

12) $\angle CLK = \angle BLH = 45^\circ$ (т.к. вертикальные углы)

13) $CL = CH - LH = 2$

14) $\triangle KCL$: $KC^2 = KL^2 + CL^2 - 2KL \cdot CL \cdot \overset{\cos}{\cancel{\sin}}\angle CLK$ (по теореме косинусов)

$100 = KL^2 + 4 - 2KL \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Пусть $KL = y$; $y > 0$

$y^2 - 2\sqrt{2}y - 96 = 0$

$y = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 96}$

$y = \sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

15) $S_{\triangle CKL} = \sqrt{p(p - CK)(p - CL)(p - KL)}$ (по ф-ле Герона)

~~$S_{\triangle CKL} =$~~ $p = \frac{CK + CL + KL}{2} = \frac{10 + 2 + 8\sqrt{2}}{2} = 6 + 4\sqrt{2}$

$S_{\triangle CKL} = \sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(4\sqrt{2} - 4)(4\sqrt{2} + 4)(6 - 4\sqrt{2})} = \sqrt{(36 - 32)(32 - 16)} =$

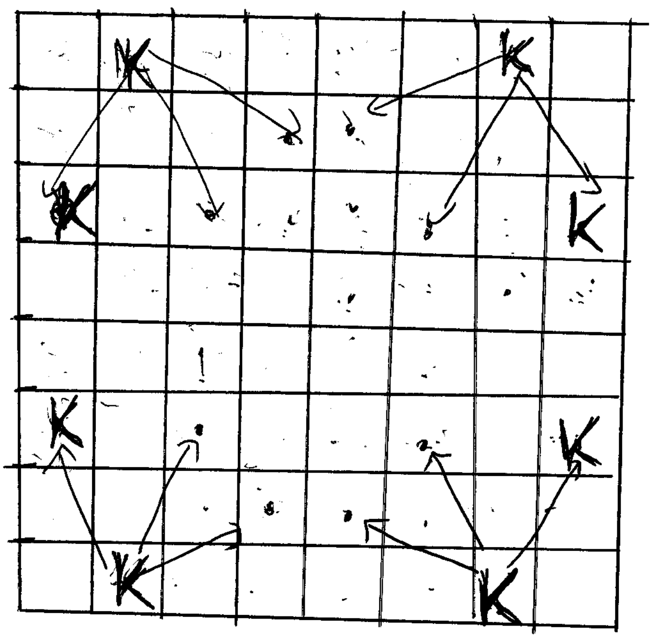
$= \sqrt{4 \cdot 16} = 2 \cdot 4 = 8$

Ответ: 8 ~~(в I случае)~~

(примечание: если $CK \parallel AB \Rightarrow \triangle ACB$ — р/б $\triangle \Rightarrow \frac{AH}{HB} = 1$, что противоречит условию задачи)

(5) (чистовик)

На рисунке показано коня, бьющие ровно 3 других коня, их всего 4 шт. Если их убрать, то ~~остальные не будут бить ровно 3 других~~



~~Ответ: 4~~ оставшиеся кони, некоторые из которых били 4х коней, будут бить ровно 3-х, поэтому их (4 шт.) необходимо убрать

Ответ: 8

(3) ЧЧЕТОВСК

] $A_{max} = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)\cdot(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n) = \frac{n^2}{2}$

докажем методом математической индукции

при $n=2$ - верно

$A = (\sin x_1 + \sin x_2)(\cos x_1 + \cos x_2) =$

$= \cancel{\sin x_1 \cos x_1 + \sin x_1 \cos 2x}$

$= 2\cdot \sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2} \cdot 2\cdot\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2} =$

$= 2\sin(x_1+x_2)\cos^2\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) = 2$

$\begin{cases} \sin(x_1+x_2) = 1 \\ \cos^2\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) = 1 \end{cases}$; $\quad x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{x_1 - x_2}{2} = 2\pi k$

~~2) $k = n+1$~~

$\cancel{A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_{n+1})(\cos x_1 + \ldots + \cos x_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{2}}$

2) предположим, что для $n=k$ верно

$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_k)(\cos x_1 + \ldots + \cos x_k) = \frac{k^2}{2}$

3) докажем, что это верно для $n=k+1$

$A = (\sin x_1 + \ldots + \sin x_{k+1})(\cos x_1 + \ldots + \cos x_{k+1}) =$

$= (\sin x_1 + \ldots + \sin x_k)(\cancel{\sin x}\ \cos x_1 + \ldots + \cos x_k) + (\cos x_{k+1} +$

$+ (\sin x_{k+1})\cdot\frac{k^2}{2}$

? $= \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$

Ответ: $\frac{n^2}{2}$

б стр.