если мы уберем тех коней, которых бьет только один конь-4, то получится больше 8.
если тех, кот. бьют только 2 коня-4 (а таких не всегда есть, т.е. иногда мы будем убирать тех, кот. бьет 3 коня-4), то мы получим столько коней-х, т.е. 8 коней.
если мы будем убирать не коней-х, ~~а~~ каких-то других - не выгодно (см. пр. рассуждение: это либо те, которых бьет 1/2 ~~коня~~ коня-4)

Т.о. минимум 8 коней:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

рис. 3.
кони, кот. нужно убрать

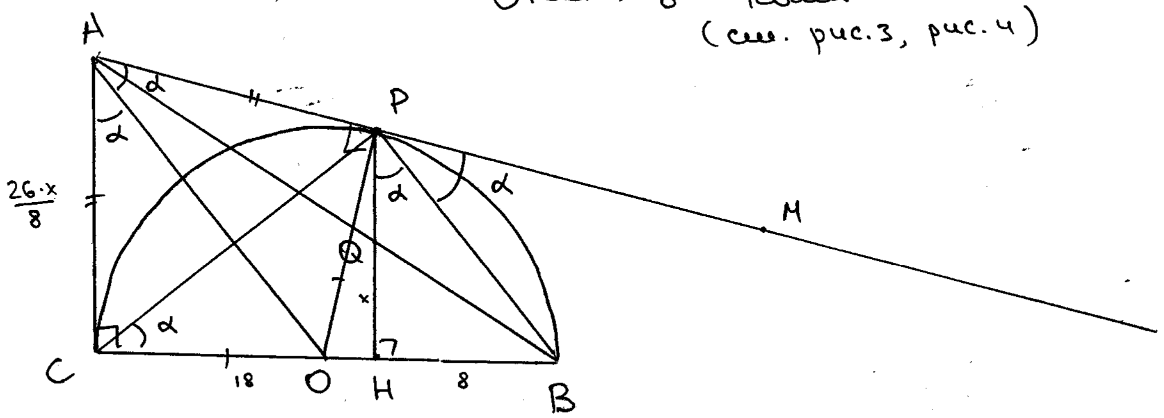
убрали →

2	3	3	3	3	3	3	2
3	2	5	5	5	5	2	3
3	5	8	0	0	8	5	3
3	5	0	8	8	0	5	3
3	5	0	8	8	0	5	3
3	5	8	0	0	8	5	3
3	2	5	5	5	5	2	3
2	3	3	3	3	3	3	2

рис. 4
после того, как убрали

Ответ: 8 коней (см. рис. 3, рис. 4)

4



$CH : HB = 9 : 4$, т.к. $CB = 26 \Rightarrow CH = 18$, $HB = 8$

$\Rightarrow PH = \sqrt{18\cdot 8} = 12$ (т.к. $\angle CPB$ ~~опр~~ опир. на диаметр $\Rightarrow 90^\circ \Rightarrow$ PH - высота в прямоуг. тр.)

Пусть $QH = x$. $\triangle QHB \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{x}{|AC|} = \frac{8}{26} \Rightarrow |AC| = \frac{x\cdot 26}{8}$

Пусть $\angle PCB = \alpha \Rightarrow \angle HPB = \alpha$. $\angle BPM = \alpha$ (т.к. это угол между касат. и хордой → равен пол-дуги PB $= \angle PCB$) $\angle CAM = \angle HPM = 2\alpha$

~~Пусть~~ Проведем $AO \parallel PB \Rightarrow \angle CAO = \angle HPB = \alpha$

$\Rightarrow \angle OAP = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

$|AC| = |AP|$ (т.к. касат. из одной точки),
$|OA|$ - общая, $\angle CAO = \angle OAP = \alpha \Rightarrow \triangle CAO = \triangle OAP \Rightarrow$
$\angle OPA = \angle ACO = 90^\circ \Rightarrow OP \perp AP \Rightarrow O$ - центр (если O не центр, пусть O' - центр. $O' \in CB$, $O'P \perp AP \Rightarrow O'P \parallel OP$, но они пересек. в т. P (?!))

Окр. $\Rightarrow CO = \frac{26}{2} = 13$. $\triangle COA$ подобен $\triangle HBP$

$\Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{\frac{26\cdot x}{8}}{12} \Rightarrow x = 6$. $S_{BQP} = S_{BHP} - S_{HBQ} = 8\cdot 12\cdot\frac{1}{2} - 8\cdot\frac{1}{2}\cdot x = 4\cdot(12 - x) = 4\cdot 6 = 24$

Ответ: 24 ✓

Вход 1 14^{20} — 14^{33}

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

85

9093

[Р]АЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 12.03.2017

****

Вариант 2

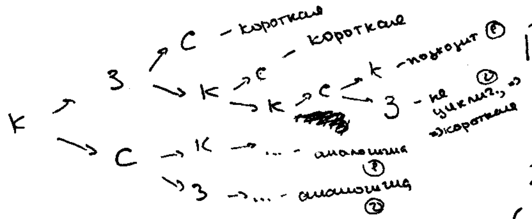
1. Ожерелье состоит из 175 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что у каждой красной бусинки разноцветные соседи, а на любом участке ожерелья между двумя зелёными бусинками есть хотя бы одна синяя. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \left(\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}\right)\cdot\left(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}\right).$$
4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$.
5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее количество коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно четырех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 12 и 12, а углы при вершине — $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$, $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}$ и $4\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

2 вариант

(1) Построим наиболее длинную цепочку, в которой встречается 1 синяя (с) бусинка и "замастим" ей все ожерелье.

Пусть у нас встретилась красная бусина (к) (если таких нет, то ожерелье имеет вид "зсзс...", где з - зеленые бусины, с - синие, тогда синих бусин слишком много. Можно меньше)

$к \to з$, $к \to с$ — после красной может идти как синяя, так и зеленая



Построив такое дерево по условию, можно заметить, что наиболее длинная (циклическая, т.е. после последнего элемента можно поставить первое) ?

есть цепочка: "кзккс~~з~~к" (если это "кзккс3", то после нее нельзя снова поставить "кзккс3", т.к. нарушается условие про 3-бусин, после нее можно только "ккс3" - не выгодно)

Тогда в нашей цепочке 6 бусин $175 : 6 = 29$ (ос. 1)

Т.е. в конце: $\ldots кзккск \underset{174}{} \overset{?}{\underset{175}{-}} \underset{1}{к}зккск\ldots$

на месте 175 бусины может только "с" быть

=> всего 30 синих минимум.

Ответ: 30

(2) Пусть изначально число имело вид: $\overline{axb}$, где a, b - числа (не 0), а x - цифра, ком. заменили 0

Тогда $\overline{axb} = 6 \cdot \overline{a0b} \overset{m \geq 1}{\Leftrightarrow} a \cdot 10^{m+1} + x \cdot 10^m + b = 6(a \cdot 10^{m+1} + b)$

$\overset{m \geq 1}{\Leftrightarrow} x \cdot 10^m = 5 \cdot a \cdot 10^{m+1} + 5 \cdot b$

при $m \geq 2$: $5 \cdot b = x \cdot 10^m - 5 \cdot a^{m+1} \Rightarrow$

$5 \cdot b \vdots 10^2 \Rightarrow b \vdots 10$ (?! с условием, т.к. число не оканчив. на 0)

при $m = 1$: $5 \cdot b + 5 \cdot a \cdot 100 = x \cdot 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 5 \cdot a \cdot 10 + \frac{b}{2}$

т.к. $x < 10$, то $a = 0$ (?!)

Пусть x - первая цифра в числе:

$\overline{xb} = 6 \cdot \overline{b} \overset{m \geq 1}{\Leftrightarrow} x \cdot 10^m + b = 6 \cdot b$ (*)

$\overset{m \geq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{5 \cdot b}{10^m}$

При $m \geq 2$: $5 \cdot b \vdots 10^2$ (т.к. x - целое) $\Rightarrow$ (?! с условием)

$m = 1$: $x = \frac{5 \cdot b}{10} = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ b = 2 \\ x = 2,\ b = 4 \\ x = 3,\ b = 6 \\ x = 4,\ b = 8 \end{array} \right.$ Т.к. $m = 1$, то $b < 10$ (иначе $m \neq 1$)

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

Пусть x - последняя цифра:

$\overline{ax} = 6 \cdot \overline{a0} \Rightarrow \overline{ax} \vdots 10$ (?! с условием)

Пусть число состояло только из x:

$x = 6 \cdot 0$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow x = 0$ (?! с условием)

Т.о. числа только 12; 24; 36; 48 подходят

Ответ: 12; 24; 36; 48

(5) Рассмотрим само поле и в каждой клетке распишем сколько из этой клетки коней бьет конь

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

рис. 1

Если убрать с доски всех коней, ком. бьют 4 коня, то мы уберем 16 коней минимум

Если убрать тех коней, которых бьют кони -4 (те кони, кот. изначально бьют 4 коня), то можно убрать меньше коней.

Рассмотрим некоторого коня -x:

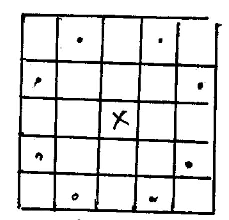


рис. 2

его бьют кони -•

заметим, что если посмотреть на расстановку коней -4 (на рис. 1), то можно заметить, что максимум из коней -4, ком. могут бить некого коня -x, есть 3 коня (пример, кони обведены в круг, конь -x отмечен x)

Т.е. если мы уберем всех таких коней -x (их 8 штук, на рис. 1. отмечены v), то на доске не останется коней, бьющих по 4 коня (при этом те кони, кот. били по 6 могут бить по 5, но не по 4)

Чистовик

(3) Докажем по индукции, что $\max(A) = \frac{n^2}{\sqrt{2}}$, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$

База: $n=1$: $\sqrt{\sin x_1 \cdot \cos x_1} = \max$

$\Rightarrow \sin x_1 = \cos x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \max = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Переход: пусть максимум для k есть $\frac{k^2}{\sqrt{2}}$. док-но

Докажем для $k+1$.

$(\sqrt{\sin x_1} + \sqrt{\sin x_2} + \ldots + \sqrt{\sin x_k})(\sqrt{\cos x_1} + \sqrt{\cos x_2} + \ldots \sqrt{\cos x_k}) + \sqrt{\sin x_{k+1}}(\sqrt{\cos x_1} + \sqrt{\cos x_2} + \ldots + \sqrt{\cos x_{k+1}}) + \sqrt{\cos x_{k+1}}(\sqrt{\sin x_1} + \sqrt{\sin x_2} + \ldots \sqrt{\sin x_k}) =$

$= \frac{k^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\sin x_{k+1}}\left(k \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt{\cos x_{k+1}}\right) + \sqrt{\cos x_{k+1}} \cdot \frac{k}{\sqrt[4]{2}} =$

$(\max \sqrt{\sin x_{k+1}} \cdot \sqrt{\cos x_{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ x_{k+1} = \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

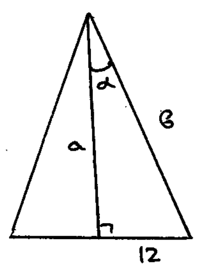
$\Rightarrow = \frac{k^2}{\sqrt{2}} + \frac{k+1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{k^2+2k+1}{\sqrt{2}} = \frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

Заключение: по м.м.и. предположение верно. док-но ✓

Ответ: $\frac{n^2}{\sqrt{2}}$

(6) Рассмотрим конус в осевом сечении:

1)



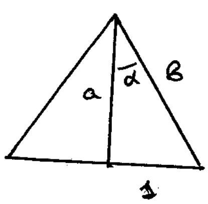
$\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}) = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 9}{5} = \frac{12}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{a} \Rightarrow a = 5 \Rightarrow в = \sqrt{144+25} = 13$

(два конуса одинаковые)

2)



$\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 9}{8} = \frac{3}{4}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \Rightarrow в = \frac{5}{3}$