$a_1 \cdot 5 + x = a_1$ – это невозможно, т.к
$4a_1 = -x$
$a_1 \in [1; 9]$, $a_1 \in N$

② Значит заменяют только первую цифру.

$\overline{a_2 a_3 \ldots a_{200}} \cdot 5 = \overline{a_1 \ldots a_{200}}$

Смотрим на последнюю цифру a_{200}.

$a_{200} \cdot 5 = a_{200} + y \cdot 10$, где $y \in N$.

$1 \cdot 5 = 5$, $2 \cdot 5 = 10$, $3 \cdot 5 = 15$, $4 \cdot 5 = 20$ – последняя цифра числа не совпадает. $5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow a_{200} = 5$.
$6 \cdot 5 = 30$, $7 \cdot 5 = 35$, $8 \cdot 5 = 40$, $9 \cdot 5 = 45$ – не подходит. $0 \cdot 5 = 0 \Rightarrow$ $a_{200} = 0$ Получаем, что $a_{200} = \left[\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.$

Смотрим на a_{199}. Если $a = 0$, то перехода нет $\Rightarrow$ для a_{199} ~~такая~~ такая же ситуация. $a_{199} = \left[\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right.$ Если же $a_{200} = 5$, то переход на разряд это 2. $a_{199} \cdot 5 + 2 = \overline{\ldots a_{199}}$ Подходят 2 и 7

$2 \cdot 5 + 2 = 12$, $7 \cdot 5 + 2 = 37$. (в ост случае на конце тоже 2 или 7, т.к после умножения на 5 в конце 0 или 5)

В обоих случаях ($a_{199} = 2$ или $a_{199} = 7$) есть переход. Если $a_{199} = 2$, то переход 1. $\Rightarrow a_{198}$: мы умножаем эту цифру на 5 и прибавляем 1. Пусть a_{198} – нч. $\Rightarrow a_{198} \cdot 5 =$ нч
$a_{198} \cdot 5 + 1 =$ ч $\Rightarrow$ невозможно. Пусть a_{198} – чет
$\Rightarrow 198 \cdot 5 =$ чет $\Rightarrow a_{198} \cdot 5 + 1 =$ нч. $\Rightarrow$ невозможно
(Если число нч, то и последняя цифра нч.)
$\Rightarrow$ Если ~~$a_{199} =$~~ $a_{199} = 2$ – невозможно
$a_{199} = 7$. Переход 3. Для a_{198} ситуация аналогично. Лишь вместо 1 прибавляется 3. $\Rightarrow a_{199} \neq 7$.

см. продолжение

③

1763

1

55

БУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Казань

Дата 20.03.17

****

Вариант 8

1. На нитке надеты 75 синих, 75 красных и 75 зеленых бусинок. Назовем пятерку подряд идущих бусинок *хорошей*, если среди них ровно 3 зеленых бусинки и по одной красной и синей. Какое наибольшее количество хороших пятерок может быть на этой нитке?
2. У 200-значного натурального числа одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 5 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \frac{\cos^2 x_1 + \ldots + \cos^2 x_n}{\sqrt{n} + \sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1 + \ldots + \operatorname{ctg}^4 x_n}}.$$
4. На основание BC равнобедренного треугольника ABC опущена высота AH. На стороне AB отмечена такая точка P, что $CP = BC$. Отрезок CP пересекает высоту AH в точке Q. Оказалось, что площадь треугольника BHQ в 4 раза меньше площади треугольника APQ. Найдите углы треугольника ABC.
5. Из n^2 лампочек собрали табло $n \times n$. Каждая лампочка имеет два состояния — включенное и выключенное. При нажатии на произвольную лампочку ее состояние сохраняется, а все лампочки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, меняют свое состояние на противоположное. Изначально все лампочки на табло выключены. Вася последовательно нажал на несколько лампочек, из которых никакие две не лежат в одной строке или в одном столбце. Какое наибольшее количество лампочек мог зажечь Вася?
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите r, если радиус меньшего основания усеченного конуса равен 15.

№1 ~~Синяя~~ з - зеленая бусинка
к - красная с - синяя

Смотрим слева направо. Встречаем первую з бусинку на нитке.

Эта з может участвовать в 5 хороших наборах. Но тогда по обе стороны должны быть еще по 2 з (т.к. в хорошем наборе

• (• • • (з) • • •) • • 3 з). Это первая з

=> 5 хороших наборов с ней быть не может. Тогда ~~расс~~ смотрим на 3ью з ~~на~~ на нитке. Чтобы эта з образовала максимальное кол-во хор. пар, слева и справа от нее по 2 з, при этом между центральной з и другими до 3ех бусинок. Заметим, что нам не выгодно ставить в какую-нибудь ~~з~~ пятерку бусинок более 3ех з (зел бусины тратим, а хор. пятерку не образуем.

• • • • з • • • • При такой расстановке можно получить 5 хор. пятерок,
$з_1 з_2$ з центр. $з_4 з_5$

при этом учтены возможные пятерки с $з_1$, $з_2$ (без з центр им не образовать хор. пятерки) и учтена часть хор. пятерок с $з_5$ и $з_4$. Заметим, что без з центр. $з_5$ и $з_4$ нужна $з_6$. Но тогда назовем $з_6$ - новым центром. Тогда у нее 5 хор. пятерок, и посчитаны все хор пятерки с $з_5$ и $з_4$ (т.к. с з центр уже посчитано => можно представить, что перед $з_4$ и $з_5$ уже нет других зеленых бусинок.

Будем считать так для всех з. бусинок. Тогда каждая ~~з~~ третья з-бусинка - центральная и образует 5 хороших пятерок. Но заметим, что кол-во зел. бусинок конечно => 75ая зеленая бусинка (она будет одной из центральных) не может образовать ~~7~~5 хор пятерок.

Тогда $\frac{75}{3} = 25$ - центр. з бусинок. 24 из них образуют по 5 хор пятерок. Рассмотрим ~~по~~ последнюю: • • • • $з_{75}$ • • • •
$з_{74} з_{73}$

Все пятерки без $з_{75}$ уже посчитаны. Найдем максимальное кол-во хороших пятерок с $з_{75}$.

1 2 3 4 $з_{75}$ 5 6 7 . . Если $з_{73}$ и $з_{74}$
$з_{73}$ $з_{74}$

стоят перед $з_{75}$, то можно образовать 3 хор пятерки {1, 2, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5, 6}, {3, 4, 5, 6, 7}. Далее ~~не~~ не будет хватать зеленых бусинок. Тогда в сумме хороших пар:

24 · 5 + 3 = 123.

Пример:

$[кcзззкcзззкc \ldots кcзззкc]\overbrace{к \ldots к}^{49}\overbrace{c \ldots c}^{49}$

Потребуется 75 з. бусинок по 3 в пятерке. 26 к и 26 с и в конце 49 к и 49 с. Сначала любая пятерка подходит. Их 73 + 25 + 25 = 123. (первые 123 бусинки)

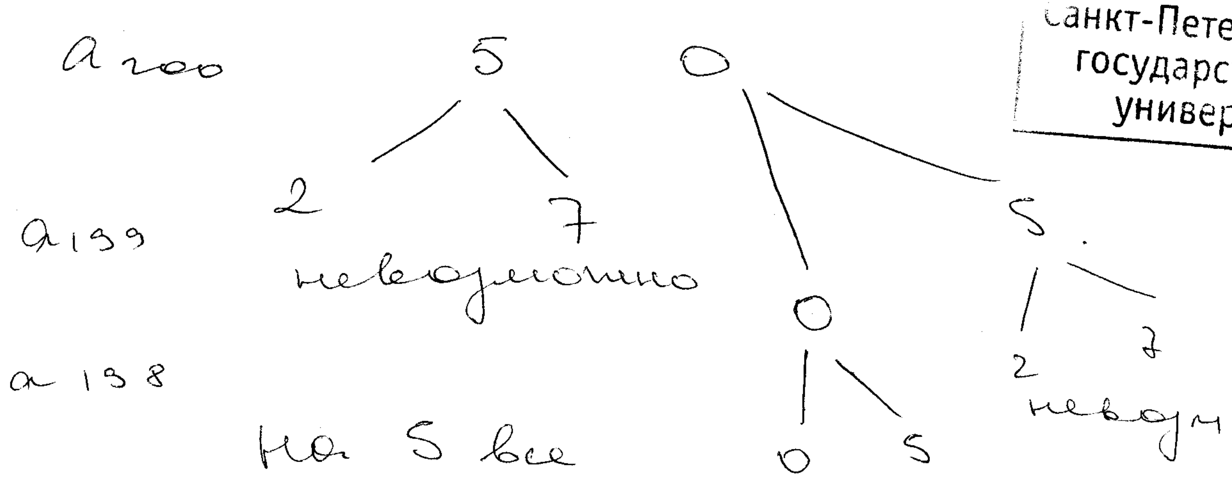
(2) $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{100}}$ - число

(I) пусть заменим a_i, где $i \neq 1$

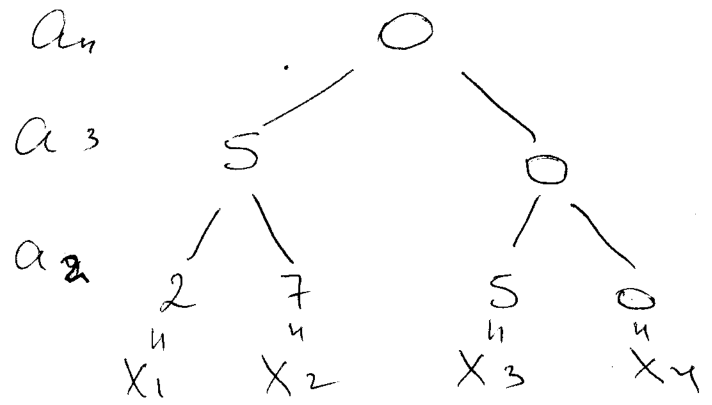
Тогда смотрим на первую цифру: a_1

~~Эту~~ Это число умножим на 5, прибавим возможный перенос от разрядов ($x \geq 0$) и получим снова a_1.

Чистовик.



На 5 все обрывается => кроме a_3, a_2 ~~...~~ - все нули



$X_1, \dots X_4$ - возможные числа

$X_1 \cdot 5 = 25\underbrace{0\ldots0}_{197} \cdot 5 = 125\underbrace{0\ldots0}_{197}$

$X_2 \cdot 5 = 75\underbrace{0\ldots0}_{197} \cdot 5 = 375\underbrace{0\ldots0}_{197}$

$5 \cdot X_3 = 5\underbrace{0\ldots0}_{198} \cdot 5 = 25\underbrace{0\ldots0}_{198}$

$X_4 = \underbrace{00\ldots0}_{199}$ - невозможно => всего 3 числа подходят

Ответ: ~~$X_1 = 25\underbrace{0\ldots0}_{197}$~~ $y_1 = 125\underbrace{0\ldots0}_{197}$, $y_2 = 375\underbrace{0\ldots0}_{197}$)

$y_3 = 25\underbrace{0\ldots0}_{198}$

№5 1. Вася никогда не зажжёт те лампы, на которые нажал, т.к. не может больше переключать свет в этой строке или столбце.
2. Каждая лампа может принимать 3 значения: 1 ее не вкл. 2. её вкл. 3 её вкл и выкл. Т/к Вася взаимодействует с этой лампой не более двух раз - меняя строку (4)

Чистовик

или менее столбец.

Смотрим на I ход Васи: он включит $(n-1)2$ ламп – $(n-1)$ в строке и $(n-1)$ в столбце

II ход: Вася выкл 2 лампы – точки пересечения с прошлым действием. Но вкл $(n-2)$ лампы в строке и $(n-2)$ в столбце.

III ходом Вася выкл уже 4 лампы, тк 4 пересечение с прошлыми ходами. Но прибавит $(n-3)$ в строке и $(n-3)$ в столбце:

Заметим, что один раз выкл лампы уже никогда не включаясь, тк мы доказали, что у лампы 3 состояния. Выключенная лампа – это уже 3 состояние.

Тогда мы iым ходом выкл. $2(i-1)$ лампы (пересечение по строке и столбцу с предыдущими $(i-1)$ ходом) и включаем $(n-i)\cdot 2$ ламп ($(n-i)$ – в строке – это лампы, не тронутые $(i-1)$ ходом минус то, на которую нажимаем $n-(i-1)-1=n-i$)

В сумме будет кол-во зажженных ламп.

Пусть после i-ого хода у нас максимум.

Тогда: $\underbrace{2(n-1)-2\cdot 0}_{I\ ход}+\underbrace{2(n-2)-2\cdot 1}_{2\ ход}+\ldots$

$\ldots+\underbrace{2(n-i)-2(i-1)}_{i\ ход}=2n\cdot i-2\cdot\frac{(1+i)i}{2}-\frac{i(i-1)}{2}\cdot 2=$

$=2ni-\cancel{2}\ i(1+i+i-1)=2ni-2i^2$

смародонт 5

Чистовик

$2ni-2i^2$ - кол-во зажженных ламп и стремится к максимуму.

Заметим, что это парабола с ветвями вниз (относительно i) => max в т. вершины. $i_в = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$

Подставим $n^2 - \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{2}$ - макс. кол-во зажженых ламп. (Если n - нч, то просто целая часть, т.к. $i+1$ ход кол-во ламп не увеличит)

Ответ: кол-во зажен. ламп: $\left[\frac{n^2}{2}\right]$, где $[a]$ - целая часть.

№3 $\quad A_{max} = \frac{\cos^2 x_1 + \ldots + \cos^2 x_n}{\sqrt{n} + \sqrt{ctg^4 x_1 + \ldots ctg^4 x_n}} \to \frac{\sqrt{n}}{4}$

1 Заметим, что ~~ctg x_i и cos x_i всегда~~ $\cos x_i \in (0;1)$, т.к. $x_i \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Соответственно $ctg\, x_i \in (0; +\infty)$

Пусть все x_i равны между собой.

$A = \frac{n\cos^2 x}{\sqrt{n} + \sqrt{n\, ctg^4 x}} = \frac{\sqrt{n}\cos^2 x}{1 + ctg^2 x} = \frac{\sqrt{n}\cos^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} =$

$= \frac{\sin^2(2x) \cdot \sqrt{n}}{4}$ Значение максимально.

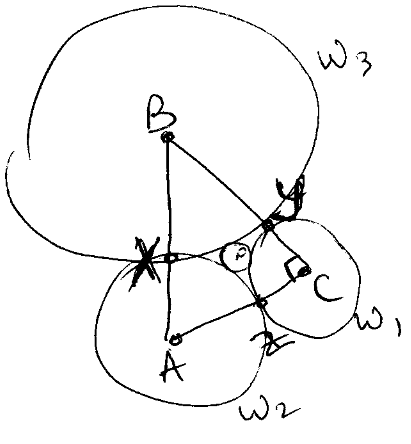
$\sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \sin^2 2x \to 1 \Rightarrow \sin 2x \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \to \frac{\sqrt{n}}{4}$, при это $\sin 2x \to 1$ при $2x \to \frac{\pi}{2}$, $x \to \frac{\pi}{4}$

когда наш. даются $x_1 \dots x_n$ - их сумма ~~от~~ равна конкретному числу от 0 до $\frac{\pi}{2} \cdot n$ (не включительно) когда дана сумма чисел и сами числа по методу Штурма известно, что максимально при равных значениях. ~~Мы докаже~~ Доказано, что если x_i равны между собой, то A max при $x = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $A \to \frac{\sqrt{n}}{4}$.

№6 Достаточно смотреть на проекцию усеченного конуса и конусов основания. Если у усечен. конуса и конусов общие образующие, то малое основание касается трех окружностей (оснований конусов) $w_1 - R = 2r$, $w_2 - R = 3r$, $w_3 - R = 10r$



w_1 и w_2 - касаются => линия их центров проходит через касание ($CZ \perp$ касательной и $AZ \perp$ кас. Раз окр касаются, то эта касательная общая => AZC - прямая.) Аналогично с ост окружностями.

Есть $\triangle ABC$, где известны стороны. Потеор cos найдем $\angle ACB$:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB$$

$$\cos\angle ACB = \frac{25r^2 + 144r^2 - 169r^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = 0 \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$$

т O - центр внутренней окр. она касается остальных окр.

ГМ продол

⑦ есле

Чистовик

$~~OY~~$ $OA = 3r + 15$

$AY = \sqrt{AC^2 - YC^2} = \sqrt{25r^2 - 4r^2} =$

$= \sqrt{21} r$

$\cos\angle OCY$ $~~OB~~$ $(10r+15)^2 = (2r+15)^2 + 144r^2 -$

$- 2 \cdot \cos\angle OCY \cdot (2r+15) \cdot 12$

$\cos\angle OCY = \dfrac{48r^2 - 240r}{24(2r+15)} = \dfrac{2r^2 - 10r}{2r+15}$

$OY^2 = (2r+15)^2 + 4r^2 - 2 \cdot \dfrac{2r^2-10r}{\cancel{2r+15}} \cdot 2r \cdot \cancel{(2r+15)}$

$OY^2 = 4r^2 + 4r^2 + 225 + 60r - 8r^3 - 40r^2$

$OY^2 = -8r^3 - \cancel{36}\ 32r^2 + 60r + 225$

$OZ = OY$, т.к. касательные

$OY = (2r+15)^2 - 4r^2 = 225 + 60r$

$\sqrt{21} r = 3r + 15 + 225 + 60r$

$r = \dfrac{240}{\sqrt{21}}$

8