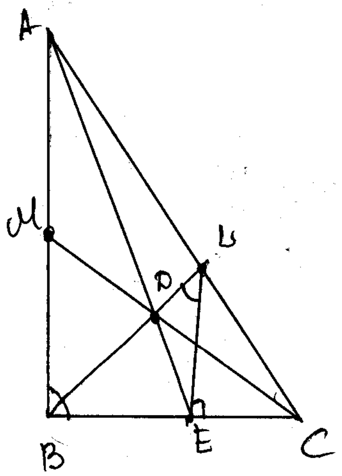
S – пл-дь ω. $S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

Ответ: 4π

Задача 4



Т.к. AE, CM и BL пересек. в т. D. По применении т. Чеви для $\triangle ABC$:

$$\frac{BM}{AM} \cdot \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CE}{BE} = 1. \quad \left[\frac{BM}{AM} = 1 \text{ по усл.}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AL}{LC} \cdot \frac{CE}{BE} = 1 \Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BE}{CE}$$

т.к. $\frac{AL}{LC} = \frac{BE}{CE} \Rightarrow AB \parallel LE$ по т. Фалеса

$\Downarrow \angle LEC = 90°$

Посчитаем S_{AEL}:

$$S_{AEL} = S_{AEC} - S_{LEC}$$

$$S_{LEC} = \frac{LE \cdot EC}{2} = \frac{x \cdot EC}{2} \Rightarrow S_{AEL} = MB \cdot EC - \frac{x \cdot EC}{2} \quad (1).$$

$$S_{AEC} = \frac{AB \cdot EC}{2} = MB \cdot EC$$

Рассмотрим $\triangle BEL$: $\angle E = 90°$, $\angle B = 45°$ (по усл.) $\Rightarrow \angle L = 45°$

т.е. $\angle BLE = 45° \Rightarrow LE = BE = x$

т.к. $LE \parallel AB \Rightarrow \triangle LEC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{LE}{AB}$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{EC}{EC + x} \qquad \frac{LE}{AB} = \frac{LE}{2MB} = \frac{x}{2MB} \Rightarrow \frac{EC}{EC + x} = \frac{x}{2MB}$$

$$2MB \cdot EC = x \cdot EC + x^2$$

$$MB \cdot EC = \frac{x \cdot EC}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Из (1):

$$S_{AEL} = MB \cdot EC - \frac{x \cdot EC}{2} = \frac{x \cdot EC}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{EC \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Ответ: $\frac{x^2}{2}$

4143

1 60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Екатеринбург

Дата 12.03.2017

****

Вариант 6

1. Ожерелье состоит из 100 красных и некоторого количества синих бусинок. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 10 красных бусинок, есть не менее 7 синих. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У 100-значного натурального числа одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 13 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Найдите минимальное значение выражения
$$A = (5(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n) + \sin x_1 + \ldots + \sin x_n) \cdot (\cos x_1 + \ldots + \cos x_n - 5(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)).$$
4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведены биссектриса BL и медиана CM, они пересекаются в точке D. Прямая AD пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника AEL, если известно, что $EL = x$.
5. Каждая из клеток доски $m \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Известно, что для любой клетки доски количество клеток, имеющих с ней общую сторону и одинаковый цвет, нечетно. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых это возможно.
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 10, 15 и 15. На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите площадь меньшего основания усеченного конуса.

Задача 2

Пусть нам дано число $\overline{a_1\ldots a_{100}}$, где $a_1,\ldots a_{100}$ — его цифры

И пусть на „0" мы заменили цифру, не стоящую первой в числе $\overline{a_1\ldots a_{100}}$. Тогда мы имеем след. равенство: $\overline{a_1\ldots a_{100}} = 13\cdot\overline{a_1\ldots 0\ldots a_{100}} \geq 10\cdot\overline{a_1 0 a_{100}}$

А число $10\cdot\overline{a_1\ldots 0\ldots a_{100}}$ имеет в записи 101 цифру. ~~Значит~~ А 100-значное число не может равняться 101-значному. Значит в числе $\overline{a_1\ldots a_{100}}$ на 0 мы заменили первую цифру.

Тогда:

$\overline{a_1\ldots a_{100}} = 13\,\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$a_1\cdot 10^{99} + \overline{a_2\ldots a_{100}} = 13\,\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$a_1\cdot 10^{99} = 12\,\overline{a_2\ldots a_{100}}$

Т.к. $12 \vdots 3$ а $10^{99} \not\vdots\, 3$ => $a_1 \vdots 3$ и $a_1 \neq 0$ (по усл.) и a_1 - цифра => $0<a_1\leq 9$

Рассмотрим варианты для a_1:

(1) $a_1=3$

$3\cdot10^{99} = 12\cdot\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$10^{99} = 4\,\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$\overline{a_2\ldots a_{100}} = 25\cdot10^{97}$

$25\cdot10^{97}$ – 99-ти значное число

⇓

$a_1=3$ $a_2=2$ $a_3=5$ $a_4-a_{100}=0$

Ответ к (1): $325\underbrace{0\ldots0}_{97}$

(2) $a_1=6$.

$6\cdot10^{99}=12\cdot\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$\overline{a_2\ldots a_{100}} = 5\cdot10^{98}$

↑ 99-ти значное

⇓

$a_1=6$ $a_2=5$ $a_3-a_{100}=0$

Ответ к (2): $65\underbrace{0\ldots0}_{98}$

(3) $a_1=9$

$9\cdot10^{99}=12\cdot\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$3\cdot25\cdot10^{97}=\overline{a_2\ldots a_{100}}$

$75\cdot10^{97}=\overline{a_2\ldots a_{100}}$

↑ 99 значное

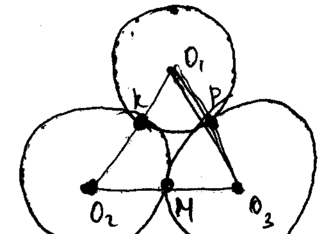
$a_1=9$ $a_2=7$ $a_3=5$ $a_4-a_{100}=0$

Ответ к (3): $975\underbrace{0\ldots0}_{97}$

Ответ: 1) 3250…0 2) 650…0 3) 9750…0

Задача 6

Т.к. усеченный конус имеет с каждым другим общую образующую и 3 других конуса касаются друг друга => основание меньшее усеч. конуса касается оснований ост. конусов. Тогда рассмотрим расположение оснований конусов на пл-ти стола:



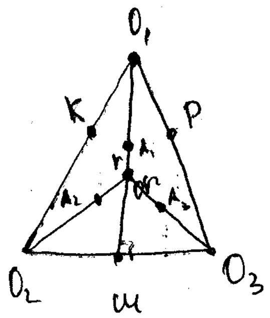
Т.к. радиус ω_2 = радиусу ω_3 =>

$O_1O_2O_3$ — равнобедр Δ и M — середина O_2O_3 (M – т. касания ω_2 и ω_3)

⇓

O_1M - ось симметрии $\Delta O_1O_2O_3$

А это значит, что центр окружности, касающейся этих 3-х ω лежит на O_1M:



O – центр окр-ти ω в основании усеч. конуса.

A_1, A_2, A_3 – т. касания ~~основ.~~ ω соответственно с $\omega_1; \omega_2; \omega_3$

Обозначим $r; r_1; r_2; r_3$ радиусы окр соотв $\omega; \omega_1; \omega_2; \omega_3$

Тогда: $O_3A_3=r_3$ $OA_3=r$ $OA_1=r$ $O_1A_1=r_1$

$O_1O_3=O_1P+PO_3=r_1+r_3=10+15=25$ $MO_3=r_3=15$

O_1M – ось симметрии $O_1O_2O_3$ и $O_1O_2O_3$ — равнобедр.

Значит $O_1M\perp O_2O_3$ => $O_1M^2=O_1O_3^2-MO_3^2$ (по т. Пифагора из ΔO_1MO_3)

$O_1M^2=25^2-15^2=(25-15)(25+15)=10\cdot40=400$ => $O_1M=20$

$O_1M=OA_1+A_1O+OM=10+r+OM=20$ => $r+OM=10$.

по т. Пифагора для Δ OMO_3: $OM=\sqrt{(OO_3)^2-MO_3^2}=\sqrt{(r+15)^2-15^2}$ =>

$OM=\sqrt{r(r+30)}$. $r+OM=10$ => $OM=10-r$

$10-r=\sqrt{r(r+30)}$

$100-20r+r^2=r^2+30r$ => $50r=100$ => $r=2$

Задача 1

Т.к. нам нужно наименьшее кол-во синих бусин, будем расставлять бусины так чтобы ~~между~~ среди ~~каждых 1-й и 10-й красной бусин~~ любых 10 кр. бусин было 7 синих.

Рассмотрим послед-ть 10 кр. бусин.

Между 1-й и 10-й стоят 7 синих бусин. и между 2-й и 11-й стоят 7 синих бусин. Тогда между 1-й и 2-й стоят столько же синих бусин, сколько между 10-й и 11-й. Аналогично для следующих. То есть сколько стоит синих между a_x и a_{x+1} красными. Столько же между a_{x+10} и a_{x+11} циклически. Также очевидно, чтобы минимизировать кол-во синих бусин, нужно между красными ставить 0 бусин или 1. Т.е. если мы заполнили места некоторые между первыми 10-ю красными, остальные заполняются однозначно. Т.к. заполняем каждый 10-и ровно 7 бусинами синими, то в любом 10-ке есть хотябы 2 пары подряд идущих красных бусин. Очевидно, что нужно минимизировать идущие подряд красные бусины. Рассмотрим 10ки кр. бусин: $\underbrace{k \quad k}_{7\text{ син.}},\ \underbrace{k \quad k}_{7\text{ син.}}$. Если после первой кр. бусин в 1-м десятке стоит синяя => между дес-ми бусины в 1-м десятке стоит тоже синяя. Заметим. что если между 1-й и 2-й красной нет синей, тогда у нас след послед-ть:

kk,kk ______ Можно, что тогда в 1-м десятке ещё 2 красных повторяются (радиальные) только в конце. Тогда пред десятком оканч. 2-я красными. Выберем

~~Справа и слева~~ справа идёт ~~по~~ 8 красных, между ними
стоит не более 6 синих. противоречие условию.
Значит между 10-ми красных стоят по синей
бусине. Значит минимум 70+10=80 синих
бусин.

Ответ: 80

Пример:

к, с, кскскскксккскскск, с, к ...