$1512+509=2021$ ~~квадратов не закрашено~~ фишек останется

Ответ: 2021 ~~квадрат~~ фишек

Задача №2

Д-ть: $x<y$

$\cancel{x^4+}$

$x+\sqrt{y^2+2} < y+\sqrt{x^2+2}$ (возведем обе части в квадрат)(~~ОДЗ~~)

$\cancel{x^2}+2x\sqrt{y^2+2}+\cancel{y^2+2} < \cancel{y^2}+2y\sqrt{x^2+2}+\cancel{x^2+2}$ (взаимоуничтожаем)

$2x\sqrt{y^2+2} < 2y\sqrt{x^2+2}$ (делим на 2)

$x\sqrt{y^2+2} < y\sqrt{x^2+2}$ (возводим в квадрат (ОДЗ: $x\neq 0$; $y\neq 0$))

$\cancel{x^2y^2}+2x^2 < \cancel{y^2x^2}+2y^2$

$2x^2<2y^2$

$x^2<y^2$ (извлекаем квадратный корень)

$x<y$ верно, по условию.

Задача №6

$n=2$: $d_1=1$ $d_2=2$ $n=6$: $d_1=1$; $d_2=2$; $d_3=3$; $d_4=6$ $n=12$: $d_1=1$; $d_2=2$; $d_3=3$; $d_4=4$; $d_5=6$; $d_6=12$

~~[illegible]~~

~~Т.к. "хорошие" делители [illegible] 1,2,3,4 [illegible] при больших [illegible] 1,2 и 3~~

Следующее число должно быть кратно 1,2,3,4, но т.к. остальные делители будут произведениями данных, то их будет больше, чем "хороших" =>
=> большего числа быть не может

Ответ: 2; 6; 12

Задача №4

$x^2+abx+(a+b)=0$

$D>0 \Rightarrow a^2b^2-4(a+b)>0$

$x_1=\frac{-\frac{ab}{2}+\sqrt{a^2b^2-4(a+b)}}{2}$ $\Rightarrow -ab:4$; $(a^2b^2-4(a+b)):4$

$x_2=\frac{-\frac{ab}{2}-\sqrt{a^2b^2-4(a+b)}}{2}$

7823 1 60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(8-9 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада г. Челябинск

Дата 22.02.17.

****

Вариант 1

1. На острове живут два племени: племя рыцарей, которые всегда говорят правду, и племя лжецов, которые всегда лгут. На главный праздник за большим круглым столом разместились 2017 островитян. Каждый житель острова произнес фразу: «мои соседи из одного племени». Оказалось, что двое лжецов ошиблись и случайно сказали правду. Сколько лжецов может сидеть за этим столом?

2. Докажите, что для любых положительных чисел $x<y$ справедливо неравенство $x+\sqrt{y^2+2}<y+\sqrt{x^2+2}$.

3. В треугольнике ABC с углом $\angle C=60^\circ$ проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что $AB_1+BA_1=AB$.

4. Даны целые числа a и b, не равные -1. Квадратный трехчлен

$$x^2+abx+(a+b)$$

имеет два целых корня. Докажите, что $a+b\leqslant 6$.

5. В каждой клетке доски 2017×2017 лежит фишка. За одну операцию можно снять с доски фишку, у которой ненулевое четное число соседей (соседними считаются фишки, расположенные в клетках, примыкающих друг к другу по стороне или углу). Какое наименьшее количество фишек можно оставить на доске с помощью таких операций?

6. Назовем делитель d натурального числа $n>1$ *хорошим*, если $d+1$ также является делителем n. Найдите все натуральные n, у которых не менее половины делителей являются хорошими.

Задача №1

Попробуем рассадить несколько человек и попытаться увидеть в их рассадке какую-либо закономерность:

~~Допустим,~~ Возьмем 1 рыцаря. Т.к он всегда говорит правду, то рядом с ним могут сидеть либо два рыцаря(I), либо два лжеца(II). Если рассматривать I вариант, то все за столом окажутся рыцарями, что нам не выгодно. Тогда рассмотрим II вариант:

ЛРЛ

Т.к рядом со лжецом уже стоит рыцарь, то по другую сторону должен стоять лжец. А рядом с этим лжецом должен стоять рыцарь и т.д.

⇒ Получаем ряд:

ЛРЛЛРЛЛРЛЛ...

Можем увидеть закономерность: ЛРЛ (назовем это 'комплект')

Посмотрим, сколько таких комплектов укладывается в 2017.

2017 : 3 = 672 (ост 1)

672 · 2 = 1344 лжеца уже есть.

~~Остается 1, который~~

1 Человек, оставшийся вне комплекта может быть рыцарем, но тогда за ним должен сидеть лжец, который ошибся(I), или он и есть тот самый лжец(II)

~~Любой из этих вариант~~ ЛРЛ

Для того, ~~чтобы~~ лжецов ~~было~~ как можно ~~больше~~, ~~допустим~~, ~~что~~ это и есть лжец, ~~который ошибся~~

~~1344+1=1345~~

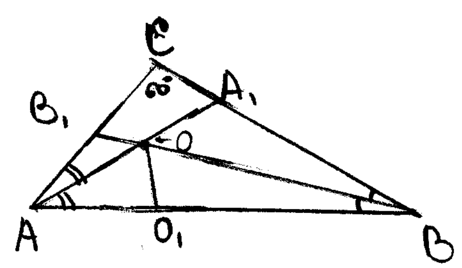
Но ~~по~~ условию ~~сказано~~, что ~~он~~ ошиблись 2 ~~лжеца~~, т.е. ~~у~~ нас ~~остается~~ еще ~~один~~ "не ~~использованный~~" ~~лжец~~. ~~Значит~~

Подходит только вариант I, т.к. при II варианте ~~на~~ ошибется лишь 1 лжец, что противоречит условию

1344 + 2 = 1346

Ответ: 1346 лжецов.

Задача №3



Дано:

$\triangle ABC$

AA_1, BB_1 - биссектрисы

$\angle C = 60°$

Доказать:

$AB_1 + A_1B = AB$

Доказательство:

1) Проведем биссектрису CC_1.

2) ~~$\angle A + \angle B + 60° = 180°$~~

В $\triangle ABC$:

$\angle A + \angle B + 60° = 180°$

$\angle A + \angle B = 120°$

В $\triangle AOB$:

$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \angle AOB = 180°$

$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \angle AOB = 180°$

$60° + \angle AOB = 180°$

$\angle AOB = 120° \Rightarrow \angle A_1OB = \angle B_1OA = 60°$

3) Проведем биссектрису OO_1 к стороне AB, тогда:

$\angle AOO_1 = \angle O_1OB = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$

4) AO - общая

$\angle C_1AO = \angle OAB_1$ (AO - биссектр. $\angle B_1AO_1$)

$\angle B_1OA = \angle O_1OA = 60°$ (из 2 и 3)

$\Rightarrow \triangle AB_1O = \triangle AOO_1 \Rightarrow AO_1 = B_1A$

5) BO - общая

$\angle OBO_1 = \angle OBA_1$ (BO - биссектр $\angle O_1BA_1$)

~~$\angle B$~~ $\angle O_1OB = \angle BOA_1 = 60°$ (из 2 и 3)

$\Rightarrow \triangle O_1OB = \triangle OBA_1 \Rightarrow A_1B = BO_1$

6) $AO_1 = B_1A$ (из 4)

$BO_1 = A_1B$ (из 5)

$\Rightarrow AO_1 + BO_1 = B_1A + A_1B$

~~AO~~

7) $AO_1 + BO_1 = AB$

$AO_1 + BO_1 = B_1A + A_1B$

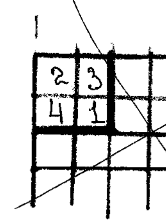
$\Rightarrow AB = AB_1 + A_1B$ 1

Задача №5

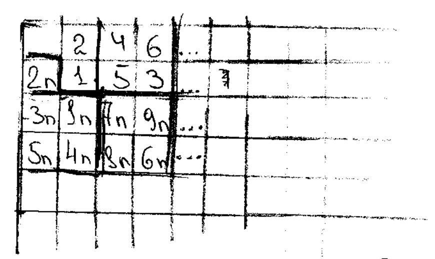
~~Рассмотрим квадраты 2×2 и раскрасим их так, чтобы осталось меньше всего незакрашенных:~~

~~Если это первый квадрат в строке:~~ ~~Если это не первый квадрат в строке:~~

~~(цифры-порядок)~~



Рассмотрим заполнение первых 4 строк



Далее ~~квадраты раскрашиваем~~ фишки убираем по примеру 3,4,5,6. В конце остаются 4 ~~пустые квадрата~~ фишки, которые мы можем ~~раскрасить~~ убрать ~~через один~~ два нижних ( )

~~Тогда~~ Таким образом в 4 строках остаются 3 ~~незакрашенных квадрата~~ фишки

2017 : 4 = 504 (ост 1)

~~504~~ 504 · 3 = 1512 ~~квадратами незакрашенных~~ фишки

Остается 1 нижняя строка, которую мы можем заполнить через 1 (...)

2017 : 2 + 1 = 509 ~~незакрашенных квадратов~~ фишек