$\boxed{№3}$

т.к. $x(1-x)$ никак не зависят друг от друга, то наибольшее A при выполнении для каждого x:

$\sqrt[4]{1-x}$ – наиб

$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ – наим

$\Rightarrow \frac{\sqrt[4]{1-x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$ – наиб

$y = \sqrt[4]{x-x^2}$

$y' = \frac{1(1-2x)}{4\sqrt[4]{(x-x^2)^3}} = 0$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad y' \Rightarrow y$ max при $x = \frac{1}{2}$

$x_{(1-n)} = \frac{1}{2}$.

$A = \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot n}{\frac{n}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[2]{0{,}5} = \cancel{0{,}5}\sqrt[2]{2 \cdot 0{,}25} = 0{,}5\sqrt[2]{2}$

Ответ: A наиб $= \sqrt[2]{0{,}5} = 0{,}5\sqrt[2]{2}$.

$\boxed{№5}$

~~простое число~~

Все условия возможно выполнить при 74·75 простых числах:

Пример: в 1-74 строках стоят различные простые числа; в 75 строке стоят произведения всех чисел каждого столбца, тогда в каждом столбце есть число невзаимнопростое для всех остальных чисел столбца.

~~Такие~~

3	5	7	1
11	13	17	2
33	65	119	3

– таким вот образом – пример на таблице 3×3: 33 = 3·11; 65 = 13·5; 119 = 17·7

Можно ли < непростых чисел? ∃ 74 непростых числа, тогда есть 1 столбец и 1 строка с только простыми числами, НО число стоящее на их пересечении взаимнопросто всем числам из своей строки и столбца (т.к. они все простые и различные) – противоречие ⇒ меньше нельзя. ч.т.д.

74·75 – наибольшее количество $\quad$ 74·75 = 5550

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times\ 75 \\ \hline 370 \\ 518\ \ \\ \hline 5550 \end{array}$$

Ответ: 5550 простых чисел.

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

8271 $\qquad$ 60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады $\qquad$ МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 04.03.2017

****

Вариант 10

1. За круглым столом сидят 50 школьников: блондины, брюнеты и рыжие. Известно, что в любой группе сидящих подряд школьников между двумя блондинами есть хотя бы один брюнет, а в любой группе между двумя брюнетами — хотя бы один рыжий. Какое наименьшее количество рыжих может сидеть за этим столом?
2. У 200-значного натурального числа стерли старшую цифру и цифру, стоящую через одну от нее. В результате число уменьшилось в 44 раза. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}.$$
4. Внутри угла раствора 30° с вершиной A выбрана точка K, расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку K проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальную площадь треугольника, отсекаемого прямой от угла.
5. В клетках таблицы 75 × 75 расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них имеет не более трех различных простых делителей. Известно, что для любого числа a из таблицы в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число b, что a и b не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол положили шар радиуса 2, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите r.

№1

∃ за столом сидит x блондинов => между ними x „промежутков" (их было бы $x-1$, если бы они сидели в ряд, но т.к. они сидят по кругу их x) =>

=> за столом $\geq x$ брюнетов ($\geq$ числа промежутков)
Аналогично за столом $\geq x$ рыжих ($\geq$ числа промежутков между брюнетами.

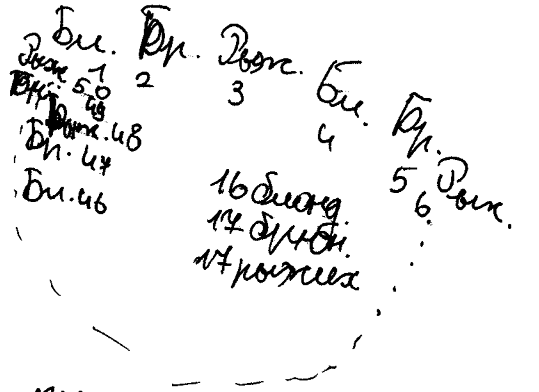
~~Итого: $3x \geq 50$ (блондины + брюнеты + рыжие = 50)~~

блондины + брюнеты + рыжие $= 50 \geq 3x$

$x \leq 16$ => блондинов ≤ 16. ∃ a - брюнетов, b - рыжих (a промежутков)

$$\begin{cases} a+b \geq 50-16 \\ a \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 34 \\ a \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b \geq 34 \\ b \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \text{минимум 17 рыжих}$$

Пример:



Ответ: минимум 17 рыжих.

№2

Изначальное число: $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{200}}$! $a_{(1-200)} \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_{(1-200)} \leq 9$

Итоговое: $\overline{a_2 a_4 a_5 a_6 \dots a_{200}}$

$$a_1 \cdot 10^{199} + a_2 \cdot 10^{198} + a_3 \cdot 10^{197} + \dots + a_{200} = 44(a_2 \cdot 10^{197} + a_4 \cdot 10^{196} + \dots a_{200})$$

$$\underbrace{a_1 \cdot 10^{199} + a_3 \cdot 10^{197}}_{\vdots 10} = \cancel{a_2 \cdot 34 + a_4 \cdot 10} \underbrace{a_2 \cdot 10^{197} \cdot 34 + a_4 \cdot 43 \cdot 10^{196} + \dots + a_{199} \cdot 10 \cdot 43}_{\vdots 10} + a_{200} \cdot 43$$

$a_{200} \cdot 43 \vdots 10$, когда $a_{200} = 0$ => $a_{200} = 0$

Сократим на 10

$$\underbrace{a_1 \cdot 10^{198} + a_3 \cdot 10^{196}}_{\vdots 10} = \underbrace{a_2 \cdot 10^{196} \cdot 34 + a_4 \cdot 43 \cdot 10^{196} + \dots}_{\vdots 10} + a_{199} \cdot 43$$

=> $a_{199} = 0$ и т.д. до: $a_1 \cdot 10^2 + a_3 = a_2 \cdot 34$ и $a_{4-200} = 0$.

$a_1 \cdot 100 + a_3 = 34 \cdot a_2$

$0 \leq 34 \cdot a_2 \leq 306$

$a_1 \neq 0$ => $a_1 \cdot 100 + a_3 \geq 100$

$a_1 \geq 1$

$a_1 \leq \frac{306 - a_3}{100}$

$a_1 \leq 3$

При $a_1 = 1$

$100 + a_3 = 34 a_2$

$100 \leq 100 + a_3 \leq 109$

При $a_2 = 2$: $68 < 100$ н/у. При $a_2 = 3$: 102 => $a_3 = 2$. При $a_2 = 4$: $136 > 109$ н/у

$$132\underbrace{00\dots0}_{197 \text{ раз}}$$

При $a_1 = 2$

$200 \leq 200 + a_3 \leq 209$

При $a_2 = 6$: 204, $a_3 = 4$. При $a_2 = 7$: $238 > 209$ н/у

$$264\underbrace{0\dots0}_{197 \text{ раз}}$$

При $a_1 = 3$

$300 \leq 300 + a_3 \leq 309$

При $a_2 = 8$: $272 < 300$ н/у. При $a_2 = 9$: 306, $a_3 = 6$

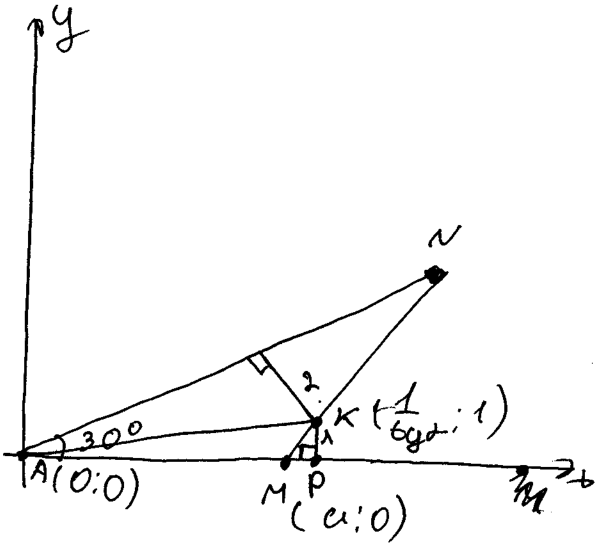
$$396\underbrace{0\dots0}_{197 \text{ раз}}$$

Ответ: $132\underbrace{0\dots0}_{197 \text{ раз}}$, $264\underbrace{0\dots0}_{197 \text{ раз}}$, $396\underbrace{0\dots0}_{197 \text{ раз}}$.

$\boxed{\text{Чистовик}}$

№4

~~Выш~~ Построим координатную плоскость так, что $A(0:0)$, а одна из сторон угла $\in Ox$



Найти:

Наименьшую $S_{\triangle AMN}$

Решение:

1) $\exists \angle KAM = \alpha \Rightarrow \angle NAK = 30^0 - \alpha$.

$\exists AM = a \Rightarrow M(a:0)$

2) $tg\,30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ прямая AN: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

(т.к проходит через A, а $k = tg\,30^0$)

3) $AP = \frac{KP}{tg\alpha} = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow K\left(\frac{1}{tg\alpha};1\right)$

4) прямая MN: $y = kx + b$ $\quad K \in MN,\ M \in MN \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{k}{tg\alpha} + b \\ 0 = ka + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -ka \\ k\left(\frac{1}{tg\alpha} - a\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -ka \\ k\left(\frac{1 - a\,tg\alpha}{tg\alpha}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{tg\alpha}{1 - a\,tg\alpha} \\ b = \frac{a\,tg\alpha}{a\,tg\alpha - 1} \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} y = \frac{tg\alpha}{1 - a\,tg\alpha}x + \frac{a\,tg\alpha}{a\,tg\alpha - 1} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} = N \qquad \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{tg\alpha}{1 - a\,tg\alpha}x + \frac{a\,tg\alpha}{a\,tg\alpha - 1}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{tg\alpha}{a\,tg\alpha - 1}x = \frac{a\,tg\alpha}{a\,tg\alpha - 1}$$

$$x\left(\frac{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1}{\sqrt{3}\,\cancel{(a\,tg\alpha - 1)}}\right) = \frac{a\,tg\alpha}{\cancel{a\,tg\alpha - 1}}$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}\,tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1} \qquad y = \frac{a\,tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1}$$

$$N\left(\frac{a\sqrt{3}\,tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1};\ \frac{a\,tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1}\right)$$

$|AM| = a$

$$|AN| = \frac{2a\,tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1}$$

2

$$S_\triangle = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \sin 30^0 \cdot \frac{\cancel{2}a^2 tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\,tg\alpha}{\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1}$$

$$S'(a) = \frac{2a\,tg\alpha(a\,tg\alpha + \sqrt{3}\,tg\alpha - 1) - a^2 tg^2\alpha}{2(\sqrt{3}\,tg\alpha + a\,tg\alpha - 1)^2} = 0$$

$2a^2 tg^2\alpha + 2\sqrt{3}a\,tg^2\alpha - 2a\,tg\alpha - a^2 tg^2\alpha$

$a^2 tg^2\alpha + 2\sqrt{3}a\,tg\alpha - 2a\,tg\alpha = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\frac{2\sqrt{3}\,tg\alpha - 2}{tg\alpha} \end{array}\right.$$

6) $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin(30-\alpha)}$

$\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = 2\sin\alpha \mid \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$.

$(2+\frac{\sqrt{3}}{2})\,tg\,\alpha = \frac{1}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{1}{4+\sqrt{3}}$

$a = -\left(\frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} - 2\right)\cdot(4+\sqrt{3}) = -\left(\frac{\cancel{2\sqrt{3}} - 8 - \cancel{2\sqrt{3}}}{\cancel{4+\sqrt{3}}}\right) : \cancel{4+\sqrt{3}} = 8$

$S = \frac{1}{2}\frac{a^2 tg\,\alpha}{\sqrt{3}tg\,\alpha + a\,tg\,\alpha - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{64}{4+\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} + \frac{8}{4+\sqrt{3}} - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{64}{\cancel{4+\sqrt{3}}}}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}+8-4-\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4+\sqrt{3}}}}\right) =$

$= \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\overset{32}{\cancel{64}}}{4} = 8$

Ответ: $S_{тр} = 8$.