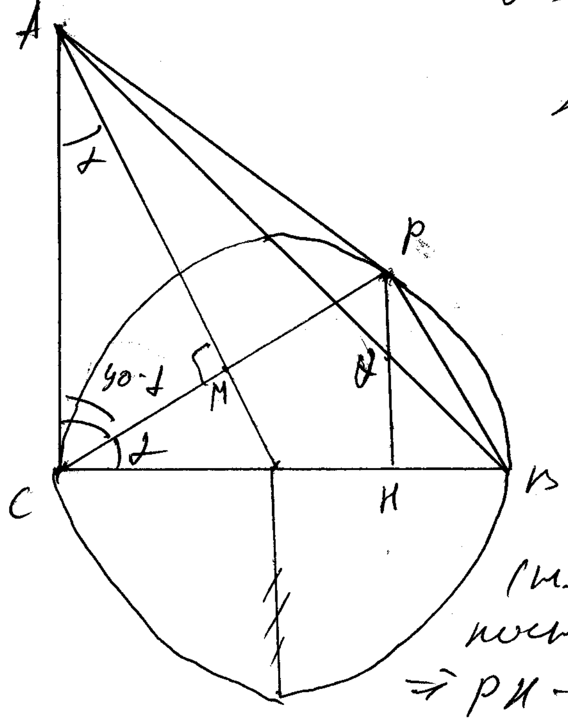
№5



Дано: $CB = 26$
$CH : HB = 9 : 4$
Найти: $S_{\Delta PQB}$ – ?

Решение:

1) $CH = 18$; $BH = 8$ (из отношения)

2) ~~∠~~ ΔCPB – прямоугольный (т.к. CB – диаметр, а (·) $P \in$ окружности) ⇒

⇒ PH – сред. геометрич.:

$PH = \sqrt{CH \cdot HB} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$; $CP = \sqrt{CH^2 + PH^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$

3)] $\angle PCH = \alpha \Rightarrow \angle ACP = 90 - \alpha \Rightarrow \angle CAM = 90 - 90 + \alpha = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAM = \angle PCH \Rightarrow \Delta CAM \sim \Delta PCH$ (по двум углам):

$\frac{CM}{PH} = \frac{AC}{CP} \Rightarrow AC = \frac{CM \cdot CP}{PH}$

4) $AC = AP$ (как отрезки кас-х ⇒ AM – мед. в ΔACP ⇒

$\Rightarrow AC = \frac{CM \cdot CP}{PH} = \frac{CP^2}{2PH} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 13}{12} = \frac{3 \cdot 13}{2}$

5) $\Delta ABC \sim \Delta HQB$ (по двум углам):

$\frac{AC}{QH} = \frac{CB}{HB} = \frac{26}{8} = \frac{13}{4} \Rightarrow QH = \frac{4}{13} AC = \frac{4 \cdot 3 \cdot 13}{2 \cdot 13} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = 12 - 6 = 6 \Rightarrow \frac{S_{\Delta PQB}}{S_{\Delta HQB}} = 1$ (относятся как основания).

6) $S_{\Delta HQB} = \frac{1}{2} QH \cdot HB = 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 24 = S_{\Delta PQB}$

Ответ: 24 ✓

Выход: $14^{48} - 14^{51}$

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2473 1 85

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Дата 12 МАРТА 2017

****

Вариант 2

1. Ожерелье состоит из 175 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что у каждой красной бусинки разноцветные соседи, а на любом участке ожерелья между двумя зелёными бусинками есть хотя бы одна синяя. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)

2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.

3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \left(\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}\right) \cdot \left(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}\right).$$

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$.

5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее количество коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно четырех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)

6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 12 и 12, а углы при вершине — $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $4 \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ и $4 \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

№1.

$N=175$

Обозначим:

к - красная бусинка

с - синяя бусинка

з - зелёная бусинка.

I Будем расставлять бусинки так, чтобы синих было как можно меньше. Заметим, что зелёных тоже должно быть как можно меньше, так как на каждые 2 зелёные приходится одна синяя.

1) Начнём с зелёной (т.к. это её следует из условия):

з

2) Рядом с ней мы можем поставить только красную (синюю - не выгодно)

зк

3) Снова ставим красную (т.к. син - не выгодно).

зкк

4) можем добавить только синюю:

зккс

5) Ставим красную (т.к. зелёные используем как можно реже):

зккск

6) Снова ставим красную (т.к. зеленые и син. используем как можно реже):

зкксkк

7) Добавляем зелёную (не синюю, т.к. тогда между ними только будет две красных, что не выгодно):

зккскkз.

II Далее будем к первым 7-ми бусинкам добавлять по 6 (пока не останется 6 бусинок):

$\underbrace{\text{зккскkз}}_{\text{первые 7}}\ \underbrace{\text{ккскkз}}_{\text{добавили 6}} \dots \text{ккскkз}.$

Итого поставили: $7+27\cdot 6 = 169$ бусинок

При этом использовали 28 синих.

Последние 6 расставим руководствуясь той же логикой, что и в начале:

$\underbrace{\text{ккскк}}_{5} + \underbrace{\text{с}}_{1}$

Последняя должна быть синей т.к. если поставим зел., то при совмещении начала и конца нарушим порядок.

Итого мы использовали: $28+2=30$ синих бусинок.

Ответ: 30

№5

Рассмотрим коней стоящих в клетках: c1, d1, e1, f1, b2, g2 - они бьют по 4 кл-ки. На рисунке значками изображены направления их атак:

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	·3	Δ3	□v3	Δ3	3	2
2	·3	3Δ	□5	Δ5	·5	O5	□v3	Δ3
3	3	·5	8O	X	X	□8	Δ5	3
4	13	5	X	6	6	X	5	v3
5	3	5	X	6	6	X	5	3
6	3	5	8	X	X	8	5	3
7	3	3	5	5	5	5	3	3
8	2	3	3	3	3	3	3	2

Заметим, что их атаки пересекаются в клетках d3 и e3. => выгоднее убрать их.

Рассуждая аналогично выгодно убрать клетки: c4, c5, d6, e6, f5 и f4. (Убранные кл-ки обозначены крестиком.)

Следуем из симметрии картинки.

~~Цифрами на рисунке обозначено кол-во коней~~

Цифрами изображено кол-во клеток, которые бьёт конь стоящий в данной клетке.

Меньше 8-ми убрать не можем, так из-за пересечения атак данные клетки наиболее выгодно убирать.

Ответ: 8

Чистовик:

№2

Представим число в виде: AXB

X – цифра, которую мы заменяем нулём (стоит на i-м месте)

B – конец числа;

A – начало числа;

B точно существует, так как если мы заменим последнюю цифру на 0, то уменьшим число максимум на 9 (а нужно в 6 раз)

После замены: $A0B$

$6(A0B) = AXB$

$6A\cdot 10^{i+1} + 6B = A\cdot 10^{i+1} + X\cdot 10^{i} + B$

$5B = X\cdot 10^{i} - 5A10^{i+1}$

$B = 2X\cdot 10^{i-1} - \cancel{A}A\cdot 10^{i+1} = 10^{i-1}(2X - A\cdot 10^{2})$

Т.к. число не оканчивается на ноль, $i = 1 \Rightarrow B$ – цифра $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = 2X - 100A$

$A = 0$ (т.к. B цифра и X тоже цифра) $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = 2X \quad \Rightarrow X = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow B = 2, 4, 6, 8. \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad AXB = 12, 24, 36, 48.$

Ответ: 12, 24, 36, 48

№3

Докажем, что при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$, A_n – максимальное.

I База:

I $n = 1$

$A = \sqrt{\sin x_1}\cdot\sqrt{\cos x_1} = \frac{\sqrt{2\sin x_1 \cos x_1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sin 2x_1}}{\sqrt{2}}$ – достигает максимума при $x_1 = \frac{\pi}{4}$

II Индукционный переход:

Пусть A_{n-1} достигает максимума при $x_1 = \ldots = x_{n-1} = \frac{\pi}{4}$, докажем, что A_n достигает максимума при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$:

$$A_n = (\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}) \cdot (\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}) =$$

$$= A_{n-1} + \sqrt{\sin x_n}(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_{n-1}}) + (\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_{n-1}}) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\cos x_n} + \sqrt{\sin x_n} \cdot \sqrt{\cos x_n} = A_{n-1} + \frac{(n-1)}{\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{\sin x_n} + \frac{(n-1)}{\sqrt[4]{2}} \sqrt{\cos x_n} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\sin 2x_n}}{\sqrt{2}} = A_{n-1} + \frac{\sqrt{\sin 2x_n}}{\sqrt{2}} + \frac{(n-1)}{\sqrt[4]{2}} (\sqrt{\sin x_n} + \sqrt{\cos x_n})$$

1) A_{n-1} – достигает максимума при $x_1 = \ldots x_{n-1} = \frac{\pi}{4}$ (из индукционного предположения)

2) $\frac{\sqrt{\sin 2x_n}}{\sqrt{2}}$ – максимально при $x_n = \frac{\pi}{4}$

3) $\frac{(n-1)}{\sqrt[4]{2}} (\sqrt{\sin x_n} + \sqrt{\cos x_n})$:

Пусть $\sqrt{(\sqrt{\sin x_n} + \sqrt{\cos x_n})^2} = |\sqrt{\sin x_n} + \sqrt{\cos x_n}| = \sqrt{\sin x_n} + \sqrt{\cos x_n}$

(~~т.к. $x_n \in [0; \frac{\pi}{2}]$~~) (т.к. $\sin x_n$ и $\cos x_n \geqslant 0$). $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{\sin x_n} + \sqrt{\cos x_n})^2} = \sqrt{(\sin x_n + \cos x_n + 2\sqrt{\sin x_n \cdot \cos x_n})} =$$

$$= \sqrt{(\sin x_n + \cos x_n + \sqrt{2}\sqrt{\sin 2x_n})}$$ максимально при $x_n = \frac{\pi}{4}$

Осталось доказать, что $\sin x_n + \cos x_n$ – максимально при $x_n = \frac{\pi}{4}$.

~~$\sqrt{(\sin x_n + \cos x_n)^2} \neq$~~ т.к. $\sin x_n$ и $\cos x_n \geqslant 0$ ($x \in [0; \frac{\pi}{2}]$)

$$\sin x_n + \cos x_n = \sqrt{(\sin x_n + \cos x_n)^2} = \sqrt{1 + 2\sin x_n \cos x_n} =$$

$= \sqrt{1 + \sin 2x_n}$ – максимальна при $x_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

~~ч.т.д.~~ $\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n = \frac{\pi}{4}$ ч.т.д.

$$A_n = (\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}) \cdot (\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}) =$$

$$= \cancel{\sqrt{\sin \tfrac{\pi}{4}} + \ldots + \sqrt{\sin \tfrac{\pi}{4}}} = n\sqrt{\sin \tfrac{\pi}{4}} \cdot n\sqrt{\cos \tfrac{\pi}{4}} = \frac{n^2}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{n^2}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{n^2}{\sqrt{2}}$.