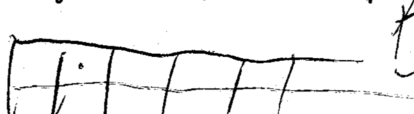
Образуют граф. Каждая клетка имеет нечётное число одноцветных соседей => степень каждой вершины в полученном графе — нечётна. Известно, что сумма всех степеней вершин в графе — чётное число, значит в полученном графе должно быть чётное число вершин. ~~Аналогично~~ т. е. клеток цвета 1 — чётное число. Аналогично и для клеток цвета 2. (Если клеток какого-то цвета нет, то их 0 — чётное число.) Тогда и во всей таблице чётное число клеток, т. е. $m \times n \,\vdots\, 2$, ~~покажем~~ т. е. $m \,\vdots\, 2$ или $n \,\vdots\, 2$. Покажем, что все такие пары подойдут. Пусть $m \,\vdots\, 2$. Разобьём таблицу на полоски $2 \times n$. В полоске $2 \times n$ все клетки покрасим в один цвет, в 2 соседних полосках ~~ду~~ будем иметь разные цвета. Рассмотрим полоску $2 \times n$:



Внутри у этой полоски есть 3 или 5 соседних клеток — ~~все~~ них нечётное число соседей все одного цвета, другие соседи если есть, принадлежат другой полоске, следовательно покрашены в другой цвет. Ответ: подойдут следующие пары: такие, что ~~или~~ m, ~~или~~ n — чётно ($\forall n \forall m: n \,\vdots\, 2$ или $\forall m \forall n: m \,\vdots\, 2$)

стр. 3

...УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1269 [2] 67

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
2016–2017
заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Иркутск

Дата 17.03.2017

****

Вариант 5

1. Ожерелье состоит из 50 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 8 синих бусинок, есть не менее 4 красных. Какое наименьшее количество красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У 100-значного натурального числа стерли одну из цифр (не старшую). В результате число уменьшилось в 13 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Найдите минимальное значение выражения
$$A = (2(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) + \cos x_1 + \ldots + \cos x_n) \cdot (\sin x_1 + \ldots + \sin x_n - 2(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n)).$$
4. Биссектриса AL и медиана BM треугольника ABC пересекаются в точке X. Прямая CX пересекает сторону AB в точке Y. Найдите площадь треугольника CYL, если известно, что $\angle BAC = 60°$ и $AL = x$.
5. Каждая из клеток доски $m \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Известно, что для любой клетки доски количество клеток, имеющих с ней одинаковый цвет и хотя бы одну общую вершину, нечетно. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых это возможно.
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 6, 24 и 24. На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите радиус меньшего основания усеченного конуса.

Задание 1. Для удобства изложения бусинки будем называть камнями. Выделим следующие 8-ки синих камней (обозначим их как $a_1, a_2, \dots, a_{50}$, красные — $b_1, b_2, \dots, b_n$): $a_1 - a_8$, $a_8 - a_{15}$, $a_{15} - a_{22}$, $a_{22} - a_{29}$, $a_{29} - a_{36}$, $a_{36} - a_{43}$, $a_{43} - a_{50}$.

Камни обозначим поочереди по кругу: $a_{50} \dots a_1 \dots a_2 \dots a_3$

На отрезке $a_i - a_{i+7}$ есть ровно 8 синих камней: $a_i \dots a_{i+7}$. Всего мы выделим 7 непересекающихся отрезков (кроме синих камней, которые являются границами отрезков), и в каждом таком отрезке должно быть не менее 4 красных камней. Значит всего их не менее $7 \cdot 4 = 28$. Пусть их ровно 28. Тогда между a_{50} и a_1 нет красного камня. Рассмотрим 8-ку синих камней $a_{44} - a_1$. В ней должно быть не меньше 4 кр. камней. Между a_{43} и a_{50} — ровно 4. Если между a_{43} и a_{44} есть кр. камень, то между a_{44} и a_{50} не более 3, тогда и между a_{44} и a_1 не более 3 — противоречие. Значит между ~~a_{42} и~~ a_{43} и a_{44} нет кр. камней. Тогда имеем аналогичную ситуацию для 8-ки синих камней a_{37} и a_{44}, т.е. аналогичными рассуждениями получаем, что между a_{36} и a_{37} нет кр. камней, а аналогично ~~и~~ далее получаем, что между a_8 и a_9 нет кр. камней, и между a_1 и a_2 нет кр. камней. Тогда имеем уже 3 подряд ~~из~~ находящихся синих камня a_{50}, a_1 и a_2, между которыми нет красн. камней. Тогда аналогичными рассуждениями рассматривая отрезок $a_{45} - a_2$ получим, что и между a_{44} и a_{45} нет кр. камней — и т.д. между a_2 и a_3 нет кр. камня (индукцией можем получить, что если есть i подряд синих камней, и нет таких отрезков из 8 синих камней, между которыми более 4 кр. камней, то есть и $i+1$ подряд лежащих синий камень — док-ся аналогично приведённым выше рассуждениям). Тогда следуя аналогичным утверждениям между a_3 и a_4, ~~из~~ a_4 и a_5, a_5 и a_6, a_6 и a_7 — нет кр. камней. Тогда нашлась 8-ка синих камней $a_{50} - a_7$, между которыми менее 4 кр. камней — противоречие. Значит кр. камней более 28. Пример на 29.

$a_1\ b_1\ a_2\ a_3\ b_2\ a_4\ a_5\ b_3\ a_6\ a_7\ b_4\ a_8\ b_5\ a_9\ a_{10}\ b_6\ a_{11}\ a_{12}\ b_7\ a_{13}\ a_{14}\ b_8\ a_{15}\ b_9\ a_{16}\ a_{17}\ b_{10}\ a_{18}\ a_{19}\ b_{11}\ a_{20}\ a_{21}\ b_{12}\ a_{22}\ b_{13}\ a_{23}\ a_{24}\ b_{14}\ a_{25}\ a_{26}\ b_{15}\ a_{27}\ a_{28}\ b_{16}\ a_{29}\ b_{17}\ a_{30}\ a_{31}\ b_{18}\ a_{32}\ a_{33}\ b_{19}\ a_{34}\ a_{35}\ b_{20}\ a_{36}\ b_{21}\ a_{37}\ a_{38}\ b_{22}\ a_{39}\ a_{40}\ b_{23}\ a_{41}\ a_{42}\ b_{24}\ a_{43}\ b_{25}\ a_{44}\ a_{45}\ b_{26}\ a_{46}\ a_{47}\ b_{27}\ a_{48}\ a_{49}\ b_{28}\ a_{50}\ b_{29}$

между $a_7 - a_8$ — 4 кр. камня, далее до a_{50} — если при сдвиге границы отрезка теряется кр. камень, то он добавляется с другой стороны, т.е. их всегда 4. Если отрезок перешёл за 50, то добавился кр. камень b_{29}, ~~все~~ и в отрезках, содержащих a_{50} имеем 4 или 5 ~~кр.~~ красных камней.

Задание 3.

Пусть $(\sin x_1 + \dots + \sin x_n) = S$, $(\cos x_1 + \dots + \cos x_n) = C$. Тогда имеем

$$A = (2S + C)(S - 2C) = 2S^2 + CS - 4SC - 2C^2 = 2(S^2 - C^2) - 3SC$$

Задание 5

~~Соседними~~ Клетки, имеющие хотя бы 1 общую вершину, назовём соседними. Для каждой клетки среди её соседей есть хотя бы 1 того же цвета ~~т~~ т.к. 0 — чётное число. Соединим отрезками центры соседних одноцветных клеток. Рассмотрим ~~допустим~~ клетки первого цвета, их центры некоторые из которых соединены отрезками

Чистовик

Задание 2.

Пусть дано число $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_{100}}$
и $B = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_{100}}$, т.е. зачеркнули i-ю цифру в A.

$A = 13B = 10B + 3B$. B — 99-значное число.

$$\begin{array}{rl} A & = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_{99} a_{100}} \\ - \; 10B & = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_{100} 0} \\ \hline & C \end{array}$$
— вычитаем „в столбик"

$C \le \overline{a_i a_{i+1} \ldots a_{100}}$

$C \le \overline{a_i \ldots a_{100}}$, т.к. ~~у~~ цифры от 1 до $i-1$ у A и $10B$ совпадают.

$C = 3B$, ~~99 знач~~ где B — 99-значное число, ~~значит~~
т.к. $i \neq 1$, то $C \le \overline{a_2 \ldots a_{100}}$ — 99 значное число,
$C = 3B \Rightarrow C$ — тоже 99 значное число и $\overline{a_i \ldots a_{100}}$ — содержит 99 знаков $\Rightarrow i = 2 \Rightarrow$ зачеркнули 2-ю цифру.

$A - 10B \,\vdots\, 3 \Rightarrow A \equiv 10B \pmod 3 \Rightarrow A \equiv B \pmod 3$
— число даёт тот же остаток от деления на 3, что и его сумма цифр.

$A \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \pmod 3$. $B \equiv a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} + 0 \pmod 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \equiv a_1 + a_3 + \ldots + a_{100} + 0 \pmod 3$

$a_2 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow a_2 = 0, 3, 6, 9$

$3B$ — 99-ти значное число $\Rightarrow$ ~~$1 \le a_1 \le 3$~~ $1 \le a_1 \le 3$

Рассмотрим последнюю цифру
у числа $A - 10B$ это a_{100}.
У числа $3 \cdot B$ это $3 \cdot a_{100}$ (по модулю 10). Значит
$3a_{100} \equiv a_{100} \pmod{10}$
$2a_{100} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a_{100} = 0$ или $a_{100} = 5$.

Задание 2 (продолжение).

Пусть $a_{100}=5$. $3\cdot 5=15 \Rightarrow c_{98}\equiv c_{99}+1 \pmod{10}$

Тогда $a_{99}-a_{100}\equiv a_{99}\cdot 3+1 \pmod{10}$

$$-\begin{array}{r} a_{99}\\ a_{100}\\ \hline +6\end{array}$$

~~$2\cdot a_{99}\equiv 6 \pmod{10}$~~

~~$2\cdot a_{99}\equiv -4 \pmod{10}$~~

$-2a_{99}\equiv 6 \pmod{10}$

~~$a_{99}\equiv$~~ $a_{99}=2$ или $a_{99}=7$

Пусть $a_{100}=0$

$a_{99}\equiv 3\cdot a_{99} \pmod{10}$

~~$a_{99}\equiv$~~ $a_{99}=0$ или $a_{99}=5$.

Подойдут ~~из~~ следующие числа: $A=\underbrace{13\cdot 10^{98}}_{100\text{ знаков}}, 26\cdot 10^{98}, 39\cdot 10^{98}$, $B=\underbrace{1\cdot 10^{98}, 2\cdot 10^{98}, 3\cdot 10^{98}}_{99\text{ знаков}}$

100 знаков.

Пусть $a_{99}=7$. Тогда имеем: $a_{98}-a_{99}\equiv a_{98}\cdot 3+2 \pmod{10}$ (+2 т.к. $7\cdot 3=21$ 2 переходит через 10)

$2\cdot a_{98}\equiv -7-2 \pmod{10}$

$2\cdot a_{98}\equiv -9 \pmod{10}$ — чего не может быть.

Тогда пусть $a_{99}=2$. Если $a_{99}=2$, то т.к. $2-5<0 \Rightarrow$ имеем вычет 1 из a_{98}

~~$a_{98}-2\equiv a_{98}\cdot 3 \pmod{10}$~~

~~$2a_{98}\equiv -2 \pmod{10}$~~

~~$a_{98}=4$ или $a_{98}=$~~

$a_{98}-1-a_{99}\equiv 3a_{98}+0$ (+0 т.к. $2\cdot 3+1<10$)

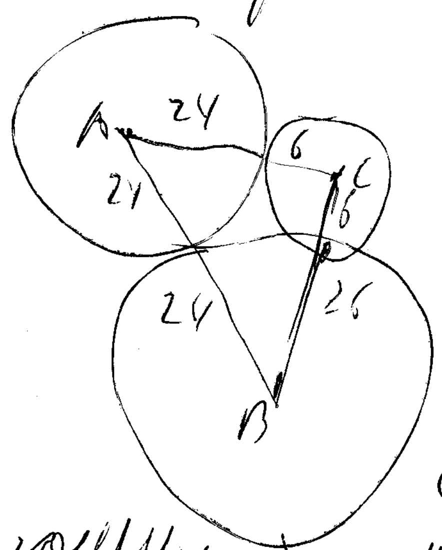
$2\cdot a_{98}\equiv -3 \pmod{10}$ — чего не может быть $\Rightarrow$ если $a_{100}=5$ — противоречие.

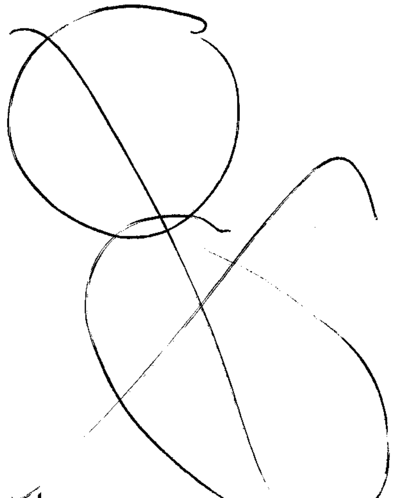
$a_{100}=0$ аналогично имеем $a_{99}=0$ и т.д.

$a_3=0$ и подходят только числа $A_1=13\cdot 10^{98}$, $A_2=26\cdot 10^{98}$, $A_3=39\cdot 10^{98}$, в которых зачёркивается вторая слева цифра.

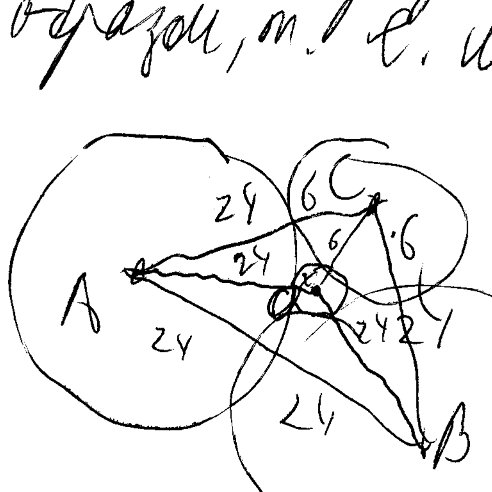
Задание 6. Чистовик

3 конуса стоят на столе, касаясь друг друга => окр-ти, являющиеся их основаниями, касаются друг друга и при этом внешним образом, т. е. ~~если~~ Рассмотрев стол как пл-ть, окр-ти будут располагаться на ней след. образом:





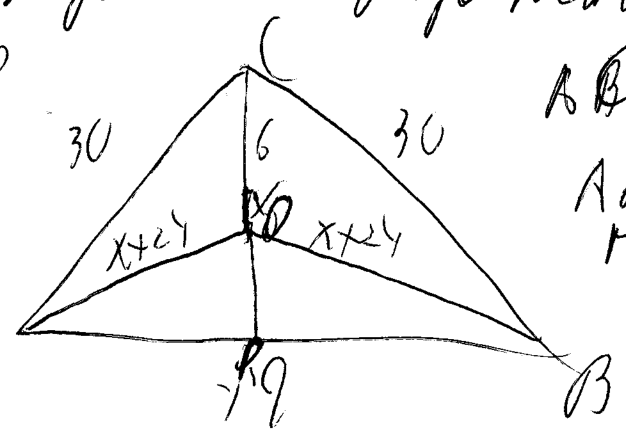
Усечённый конус имеет с каждым другим общую образующую, значит его меньшее основание касается стола, также касается и всех окр-тей оснований других конусов, также попарно и внешним образом, т. е. имеем ~~след~~ на столе след. картинку:



где A, B, C — центры конусов, O — центр меньшего основания усеч. конуса.

Задание 6 (продолжение)

м.р



ABC — р/б Δ-к, $AC = CB = 24+6 = 30$,
$AB = 48$; $AO = OB$ => т. O лежит на сер. перп-ре к AB,
$AO = x+24$, $OB = x+24$, $CO = 6+x$.

Найти x. D — середина AB. ΔADC — прямоуг;
$\angle D = 90°$; $AD = 24$, $AC = 30$ => $CD = 18$ (по т. Пифагора)

$DO = DC - OC = 18 - (6+x) = 6 - x$.

$AO^2 = AD^2 + DO^2$

$(24+x)^2 = (6-x)^2 + 24^2$

$24^2 + 48x + x^2 = 36 - 12x + x^2 + 24^2$

$60x = 36$

$x = \frac{6}{10} = 0{,}6$

Ответ: радиус меньш. основ. усеч. конуса равен 0,6