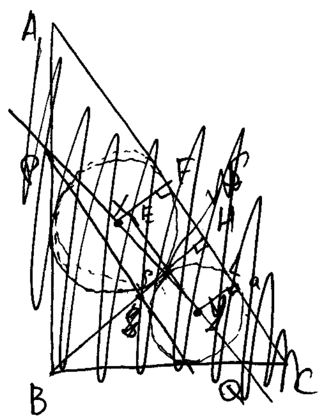
чистовик (страница 3)

$$2r_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{239}{12\cdot\sqrt{3}}+\frac{289\sqrt{3}}{12}\Rightarrow 2r_0\cdot(\sqrt{3}-1)=\frac{239+289\cdot 3}{12}\Rightarrow r_0(\sqrt{3}-1)=\frac{1106}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_0\cdot 2=\frac{1106}{12}\cdot(\sqrt{3}+1)\Rightarrow r_0=\frac{553}{12}\cdot(\sqrt{3}+1)$$

Ответ: радиус шара $r_0=\frac{553}{12}(\sqrt{3}+1)$

Задача 4



1) $\triangle BHA$ и $\triangle CBA$, BHC и ABC подобны как прямоуг. треугольники, имеющие общий угол.

Пусть $CH=a$. $\Rightarrow AH=\frac{BH^2}{CH}=\frac{h^2}{a}$. r_1 - радиус окр. с центром X. r_2 - радиус окружности с центром Y., тогда $r_2\geq r_1$.

2) $S_{CBH}=\frac{1}{2}\cdot CH\cdot BH=\frac{a\cdot h}{2}$. $S_{CBH}=\pi\cdot p\cdot r_2=r_2\cdot\frac{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}{2}$. ($p$ - периметр $\triangle CBH$)

$$r_2=\frac{a\cdot h}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}\Rightarrow\frac{r_2}{r_1}=\frac{a}{h}\Rightarrow r_1=\frac{h^2}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}.$$

3) Проведем XF перпендикулярно AC и $YL\perp AC$. Точки F и $L\in[AC]$. Проведем прямую FX, проведем $YE\parallel FL$, причем $|YE|=|LF|$. Получим прямоугольник $YLFE$. Обозн. S точкой перес. BH и QP. $\operatorname{tg}\angle BSQ=\operatorname{tg}\angle ESY=\frac{Ey}{EX}=\frac{r_1+r_2}{r_2-r_1}=$

$$=\frac{\left(\frac{a\cdot h}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{h^2}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}\right)}{\left(\frac{a\cdot h}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}-\frac{h^2}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}\right)}=\frac{ah+h^2}{a\cdot h-h^2}=\frac{a+h}{a-h}.$$

$$\operatorname{tg}\angle BQP=\operatorname{tg}(\pi-\angle BSQ-\angle HBC)=-\operatorname{tg}(\angle BSQ+\angle HBC)=-\frac{\operatorname{tg}\angle BSQ+\operatorname{tg}\angle HBC}{1-\operatorname{tg}\angle BSQ\cdot\operatorname{tg}\angle HBC}=$$

$$=\frac{\frac{a+h}{a-h}+\frac{a}{h}}{1-\frac{(a+h)a}{h(a-h)}}=-\frac{(a+h)\cdot h+a(a-h)}{h\cdot(a-h)-(a+h)a}=-\frac{ah+h^2+a^2-ah}{ah-h^2-a^2-ah}=\frac{h^2+a^2}{h^2+a^2}=1\Rightarrow\angle BQP=\frac{\pi}{4}$$

$\angle BPQ=\frac{\pi}{4}$, т.е. $\triangle BQP$ - равнобедр.; $BP=PQ$. D - т-ка пересечения $YD\perp BC$

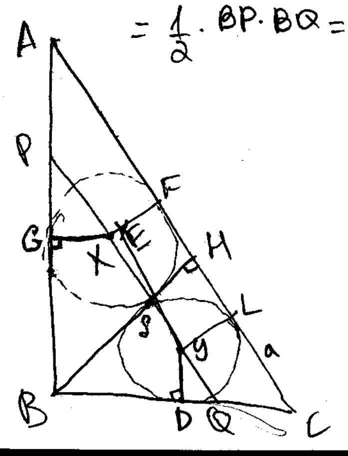
4) $QY=r_2\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{h^2}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}$. $BX=\sqrt{2}\cdot XG=r_2\sqrt{2}=\frac{h^2\cdot\sqrt{2}}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}$. G - т-ка перес. перп. из т-ки X и BA. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow XY=\sqrt{(r_2-r_1)^2+(r_2+r_1)^2}=\sqrt{r_2^2-2\cdot r_1\cdot r_2+r_1^2+r_2^2+r_1^2+2r_1r_2}=\sqrt{2(r_1^2+r_2^2)}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a\cdot h}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}\right)^2+\left(\frac{h^2}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{h\cdot\sqrt{a^2+h^2}}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}.$$

$$PQ=PX+XY+QY=\frac{a\cdot h\sqrt{2}}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot h\cdot\sqrt{a^2+h^2}}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{h^2\sqrt{2}}{a+h+\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{h\sqrt{2}\cdot(a+\sqrt{a^2+h^2}+h)}{(a+h+\sqrt{a^2+h^2})}=h\sqrt{2}\Rightarrow BP=BQ=h\Rightarrow S_{BQP}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot BP\cdot BQ=\frac{1}{2}h^2$$



Ответ: $S_{BQP}=\frac{1}{2}h^2$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

7814

1

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Нижний Новгород

Дата 24.03.2017

****

Вариант 4

1. На нитке надеты 150 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что среди любых шести бусинок, идущих подряд, есть хотя бы одна зеленая, а среди любых одиннадцати, идущих подряд, — хотя бы одна синяя. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть на нитке?

2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 9 раз. Сколько существует чисел, для которых это возможно?

3. Числа $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ удовлетворяют условию $x_1^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+\ldots+y_n^2\leqslant 1$. Найдите максимальное значение выражения
$$A=(3(x_1+\ldots+x_n)-5(y_1+\ldots+y_n))\cdot(5(x_1+\ldots+x_n)+3(y_1+\ldots+y_n)).$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. Точки X и Y — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и CBH соответственно. Прямая XY пересекает катеты AB и BC в точках P и Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH=h$.

5. Прямоугольник 3×5 разбит на 15 квадратов 1×1. Назовем *путем* перемещение по сторонам единичных квадратов, при котором ни одна из сторон не проходится дважды. Какую наибольшую длину может иметь путь, соединяющий две противоположные вершины прямоугольника?

6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 72, 28 и 28, а углы при вершине — $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). Над столом подвесили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите радиус шара.

Задача 2

n - искомое число, которое состоит из $k+1$ цифр. Понятно, что $k \geq 1$. Пусть $n = a \cdot 10^k + b \cdot 10^{k-1} + c$, где a, b - первые 2 цифры числа n, $\underline{0 \leq c \leq 10^{k-1}-1}$ (*). Положим, что заменили цифру с номером 2 и больше. В результ. замены получили число $n/9$. Тогда $n/9 > a \cdot 10^k \Rightarrow n > 9a \cdot 10^k$. $a \cdot 10^k + b \cdot 10^{k-1} + c > 9a \cdot 10^k$. $b \cdot 10^{k-1} > 8a \cdot 10^k - c > 8a \cdot 10^k - a \cdot 10^k = 7a \cdot 10^k$ (т.к. $c \leq 10^{k-1}-1$, из (*); $10^{k-1}-1 < a \cdot 10^k$).
$b \cdot 10^{k-1} > 7a \cdot 10^k \Rightarrow b > 7a \cdot 10 \Rightarrow b > 70a \geq 70$, поскольку $a \geq 1$. Противоречие, т.к. b-цифра, т.е. не может быть больше 9. Значит, заменили первую цифру, то есть стерли.
Пусть $n = a \cdot 10^k + t$, где a-первая цифра $0 \leq t \leq 10^k - 1$ (**) $\frac{n}{9} = t \Rightarrow n = 9t$. $9t = a \cdot 10^k + t \Rightarrow 8t = a \cdot 10^k$. Согласно (**) $t \leq 10^k - 1 \Rightarrow a = \frac{8t}{10^k} < 8 \Rightarrow a \leq 7$. Если $a = 1 \Rightarrow t = \frac{10^k}{8} = 125 \cdot 10^{k-3}$.

$a=2 \Rightarrow t = 25 \cdot 10^{k-2}$.
$a=3 \Rightarrow t = 375 \cdot 10^{k-3}$
$a=4 \Rightarrow t = 5 \cdot 10^{k-1}$
$a=5 \Rightarrow t = 625 \cdot 10^{k-3}$
$a=6 \Rightarrow t = 75 \cdot 10^{k-2}$
$a=7 \Rightarrow t = 875 \cdot 10^{k-3}$. По условию, последняя цифра - не ноль, поэтому получаем числа: 1125, 225, 3375, 45, 5625, 675, 7875.

Ответ: 1125, 225, 3375, 45, 5625, 675, 7875.

Задача 3

Заменим суммы: $x_1 + \ldots + x_n$ на X; $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = Y$. Используем нер-во $a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, следует из $(a-b)^2 \geq 0$. Тогда $A = (3X - 5Y)(5X + 3Y) \leq \frac{1}{2}\left((3X-5Y)^2 + (5X+3Y)^2\right) = 17 \cdot (X^2 + Y^2)$. По неравенству средние квадр. и ср. арифметического:
$\left(\frac{X}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}$, $\left(\frac{Y}{n}\right)^2 \leq \frac{y_1^2 + \ldots y_n^2}{n}$, $X^2 + Y^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2) \leq n$.

$A \leq 17n$
$A = 17n$ при одновременном выполнении след. равенств:
$$\begin{cases} 3X - 5Y = 5X + 3Y \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a. \\ y_1 = y_2 = \ldots = y_n = b \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1 \end{cases}$$
$3an - 5bn = 3bn + 5an \Rightarrow 2an = -8bn \Rightarrow a_n = -4b_n$

$n \cdot 17 \cdot b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{17n}} \Rightarrow a_n = \frac{-4}{\sqrt{17n}}$

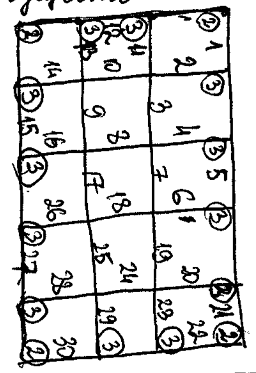
Итак, $a = 12n$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\frac{4}{\sqrt{17n}}$, $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{1}{\sqrt{17n}}$

Ответ: $a = 12n$

Задача 5

В квадрате 24 вершины и 38 отрезков единичной длины, кот. соед. эти вершины между собой. В нас. положении получ. 12 вершин со степенью 3, 4 вершины со степенью 2 и 8 вершин со степенью 4. Пусть я хожу по сторонам квадратиков, 1 ход = 1 сторона квадратика. Плохой стороной назовем такой отрезок, по которому я прошла дважды. По условию задачи на нашей ломаной таких отрезков быть не должно.
Рассмотрим вершины степени 3, они расположены по границам квадрата. Если у этой вершины останется 3 отрезка, то не менее двух будут исходящими или входящими. В обоих случаях появляется плохой отрезок. $\Rightarrow$ не должно остаться вершин с 3-мя отрезками. Заметим, ~~как и раз~~ 1 отрезок: можно сделать четными не более 2-х вершин. Также заметим, что на 1-м (как и на противоположном) квадратике есть не менее одного плохого отрезка, поскольку из начальной вершины не может ~~выйти~~ быть 2 х исходящих отрезков, а если они разных направлений, то получаем плохой отрезок. Аналогично и с противоположным квадратиком. Про эти 2 отрезка получим: что 4 вершины с нечетными степенями стали четными, а нечетных осталось 8.
Не более двух пар из оставшихся нечетных вершин ~~могут~~ можно сделать четными,

пр. 1 отрезок. Остальные 2 пары становятся четными · 2-х отрезков. Значит, требуется убрать не менее $2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$ отрезков. Тогда максимальная длина пути составит 30 отрезков. Рассмотрим пример в пути из 30 отр. (рисунок) существ. много других примеров

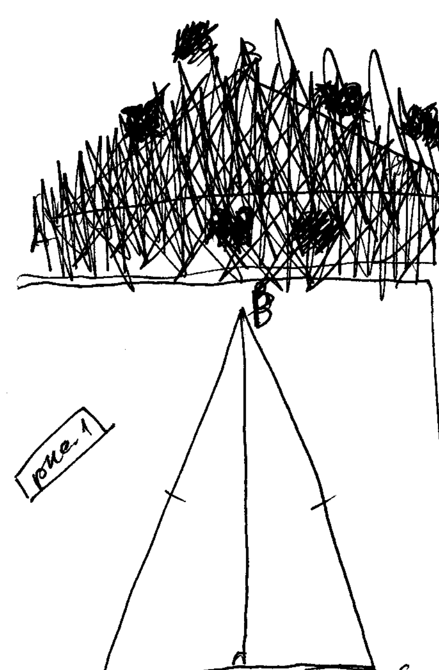


Цифрами не в кружочках записан „путь"

Ответ: 30

Задача 6

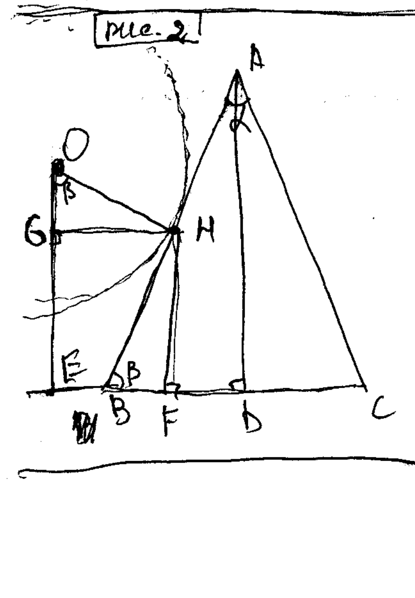
1) Поскольку центр шара равноудален от центров оснований конусов, то проекция центра шара на плоскость оснований конусов - будет центром окружности, описанной около треугольника, вершинами которого будут центры оснований конусов (рис.1)



$R_1 = 72$
$R_2 = R_3 = 28$ - радиусы оснований конусов, тогда:
$AB = R_1 + R_2 = 72 + 28 = 100$, $AC = R_2 + R_3 = 28 + 28 = 56$. $BC = R_1 + R_3 = 72 + 28 = 100$.
$\triangle ABC$ - равнобедренный) BH - высота. $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{1000 - 784} = \sqrt{9216} = 96$.
По теореме синусов $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$. $R = \frac{2 \cdot AH}{2 \cdot \sin(2\angle ABH)} = \frac{AH}{2\sin(2\angle ABH) \cdot \cos\angle ABH} =$

$= \frac{AH}{2 \cdot \frac{AH}{AB} \cdot \frac{BH}{AB}} = \frac{AB^2}{2BH} = \frac{10000}{192} = \frac{625}{12}$

2) Рассмотрим плоскость, проходящую через центр шара с радиусом r_0, и ось конуса с радиусом основания r и углом при вершине α (рис.2)



HG, HF - перпендикуляры, опущ. из точки кас. конуса и шара H на OE и BC $\underset{\text{соответственно}}{}$ (O-центр окружности). $\angle ABC = \angle ACB = \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$.
$\angle EBH = \pi - \beta$. $\angle EOH = 2\pi - \angle OEB - \angle OHB - \angle EBH = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - (\pi - \beta) = \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$.
$tg\beta = \frac{FH}{BF} = \frac{OE - OB}{EF - EB} = \frac{OE - r_0 \cdot \cos\beta}{r_0 \cdot \sin\beta - (R - r)}$. $OE = \left(r_0 \sin\beta - (R - r)\right) \cdot tg\beta + r_0 \cdot \cos\beta$. $OE = r_0 \cdot \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} + r_0 \frac{\cos^2\beta}{\cos\beta} - (R - r) tg\beta$. $OE = \frac{r_0}{\cos\beta} - (R - r) tg\beta$.
r и β могут принимать только по 2 различных значения.
Подставим их и приравняем: $OE = \frac{r_0}{\left(\cos\frac{\pi - \frac{2}{3}\pi}{2}\right)} - \left(\frac{625}{12} - 72\right) \cdot tg\left(\frac{\pi - \frac{2}{3}\pi}{2}\right) =$

$= \frac{r_0}{\cos\left(\frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2}\right)} - \left(\frac{625}{12} - 28\left(tg\left(\frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2}\right)\right)\right.$

$\frac{r_0}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{239}{12} \cdot tg\frac{\pi}{6} = \frac{r_0}{\cos\frac{\pi}{3}} - 289 \cdot tg\frac{\pi}{3}$.

$\frac{2r_0}{\sqrt{3}} + \frac{239}{12} \cdot \sqrt{3} = r_0 \cdot 2 - \frac{289 \cdot \sqrt{3}}{12}$. (прод. на стр. 4)

Задача 1

Каждая зеленая бусинка участвует максимум в 6 комбинациях, т.е. должно идти так: З×××××З.
Каждая синяя бусинка участвует максимум в 11 комбинациях => должно идти так: С××××××××××С. Таким образом, зеленых бусинок: 150 : 6 = 25.
Синих бусинок: 150 : 11 = 13.(ост. 7), т.е. между какими-то двумя синими бусинками находится 7 бусинок другого цвета. Итого красных бусинок:
150-25-13= 150-38=112 красных бусинок

$\boxed{\text{Ответ: 112}}$

чистовик (страница 5)