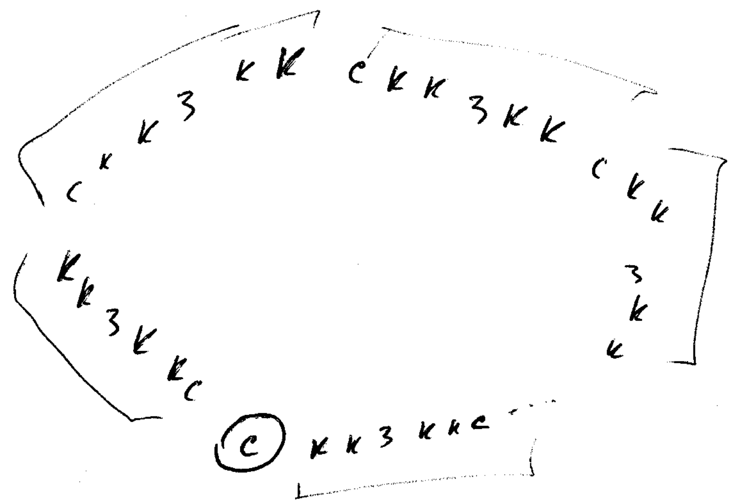
Пример: будем заполнять блоками

$\boxed{с\ к\ к\ з\ к\ к}$ $\boxed{с\ к\ к\ з\ к\ к}$ ...

$175 \,|\, 6$
$12 \quad 29$
55
54

всё разобьется на 29 блоков и останется 1 бусинка, которую мы сделаем синей



в каждом блоке из 6-ти всё выполняется, на стыке блоков тоже, ведь между любыми зелёными есть синяя а одинокую мы берем синюю, и в крайних блоках тоже всё не нарушается значит пример работает.

Ответ: 30 синих бусинок.

Задача №2.

для начала заметим, что, если мы ~~удерём~~ заменим не первую цифру, число не сможет быть в 6 раз меньше чем было.

$\overline{a...b...}$ — изначальное число.

$\overline{a...0...}$ — стало, тогда

$\overline{a..b...} \geq \overline{a000.00} \Rightarrow 6\cdot\overline{a...b...} \geq 6\cdot\overline{100..0}$

все не первые цифры заменим на 0-ли

+1 инд +1 инет +2 инета

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

8569 60

…ЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 12. 03. 2017

****

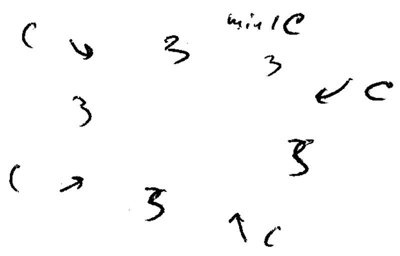
Вариант 2

1. Ожерелье состоит из 175 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что у каждой красной бусинки разноцветные соседи, а на любом участке ожерелья между двумя зелёными бусинками есть хотя бы одна синяя. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \left(\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}\right) \cdot \left(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}\right).$$
4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$.
5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее количество коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно четырех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 12 и 12, а углы при вершине — $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ и $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

Задача №1

В ожерелье стоит 175 бусинок.

Заметим некоторые вещи: если между двумя зелёными бусинками стоит хотя бы одна синяя бусинка, и все бусины стоят по кругу, значит что синих бусинок не меньше чем зелёных (между двумя соседними есть хотя бы 1 С)

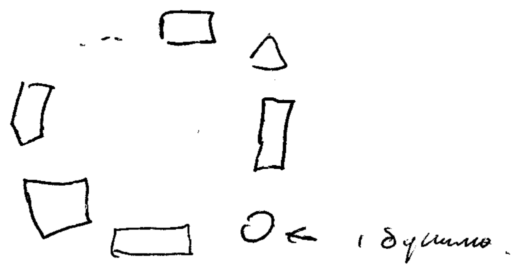


~~теперь при~~

теперь заметим, что среди любых трёх подряд идущих бусинок хотя бы одна не красная (потому что три подряд красных бусин быть не может.

тогда разобьём все 175 бусинок на тройки и оставшуюся 1 таким образом

□ – тройка



Тогда получится 58 троек

Докажем, что 58 не красных бусинок быть не может.

от противного

Я может, тогда в каждой такой тройке ровно 1 не красная и одиночная красная: тогда возможно несколько случаев.

обозначим не красные буквой Ч

1) Ч (К) Ч

1) Обе не красные стоят рядом с (К)

2) с одной стороны от (К) не кр, а с другой кр

2) Ч (К) К

1 случай: Ч | ч к к | (К) | ч к к | ч к к | ...

если Ч стоит сбоку, то оставшиеся 2 бусины КР, => первая бусина из следующей тройки тоже Ч и так далее.(*)

| К К Ч | Ч к ч | рис 1

и т.к. ~~бусинок конечное~~ троек конечное число то ~~в конце~~ найдётся 2 тройки, которые

((*) все остальные тройки будут заполняться именно так)

будут соединены как на рис 1. ~~Ч~~ четыре К рядом противоречие.
потому что КРФ.

2) | к к Ч | (К) | К Ч К | . . к | . К | (1 2 3, 1 2 3)

слева ~~по~~ тройка будут заполняться так же как в 1 случае, а справа Ч бусина может стоять как на 1, так и на 2ой позиции, ~~но все~~ (как только Ч встанет на позицию 1, все остальные за ней тоже встанут на позицию 1). Но на позиции 3 будет стоять К а т.к. всё замкнуто, то | ч к к | (К) дойдёт до позиции, где хотя бы 3 кр будут рядом. противоречие.

т.о. за 58 не кр. бусинок нельзя, значит их минимум 59. а т.к синих не меньше чем зелёных, то синих минимум 30. а на 30 синих существует пример:

чистовик лист 2.

~~$\overline{a\ldots 0\ldots} < 2\cdot a000$~~

$\overline{a\ldots 0\ldots} < \overline{a99\ldots9} < \overline{(a+1)00\ldots0}$ (к n)

(или $\overline{10\ldots0\ldots00}$) (n+1 ноль)

но $\overline{(a+1)\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ раз}}} < \overline{6\cdot 6a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ раз}}} = 6\cdot\overline{a\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ раз}}}$

$\overline{6\cdot a\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}} = 6\cdot\overline{a\underbrace{\ldots0}_{n\text{ раз}}}$

Все нер-ва мы только умножали и получили строго больше, когда должно быть равно, значит зачеркнуть не первую цифру нельзя

(если число однозначное, то для него эти рассуждения не проходят, но легко понять, что никакая цифра ответом не является)

Тогда посмотрим на какие цифры могут оканчиваться числа. При умножении на 6 эта цифра должна дать число оканчивающееся на такую же цифру

..1	→ ..6
2	→ ..2
..3	→ ..8
..4	→ ..4
..5	→ ..0
..6	→ ..6
..7	→ ..2
..8	→ ..8
..9	→ ..4

(0 нельзя брать)

Тогда это цифры 2, 4, 6, 8

Посмотрим на двузначные числа,

Подходят

$2\cdot 6 = 12$

$4\cdot 6 = 24$

$6\cdot 6 = 36$

$8\cdot 6 = 48$

И никакие другие. ~~если~~

Теперь докажем, что никакое ~~двух~~ число больше двузначного не подходит

~~а~~ если это одно число, то 2 последние цифры должны были эти переходить сами в себя

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\ldots a}\,2 \\ \times\quad 6 \\ \hline \ldots\cancel{x}\,2 \end{array}$$

$a = 1$	$x = 7$
$a = 2$	$x = 3$
$a = 3$	$x = 9$
$a = 4$	$x = 5$
$a = 5$	$x = 1$
$a = 7$	$x = 3$
$a = 6$	$x = 7$
$a = 8$	$x = 9$
$a = 0$	$x = 1$
$a = 9$	$x = 5$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\ldots a}\,4 \\ \times\quad 6 \\ \hline x\,4 \end{array}$$

$a = 1$	$x = 8$
$a = 2$	$x = 4$
$a = 3$	$x = 0$
$a = 4$	$x = 6$
$a = 5$	$x = 2$
$a = 6$	$x = 8$
$a = 7$	$x = 4$
$a = 8$	$x = 0$
$a = 9$	$x = 6$
$a = 0$	$x = 2$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{\ldots a}\,6 \\ 6 \\ \hline x\,2 \end{array}$$

$a = 1$	$x = 9$
$a = 2$	$x = 5$
$a = 3$	$x = 1$
$a = 4$	$x = 7$
$a = 5$	$x = 3$
$a = 6$	$x = 9$
$a = 7$	$x = 5$
$a = 8$	$x = 1$
$a = 9$	$x = 7$
$a = 0$	$x = 3$

$$\begin{array}{r} \overset{4}{\ldots a}\,8 \\ 6 \\ \hline x\,8 \end{array}$$

$a = 1$	$x = 0$
$a = 2$	$x = 6$
$a = 3$	$x = 2$
$a = 4$	$x = 8$
$a = 5$	$x = 4$
$a = 6$	$x = 0$
$a = 7$	$x = 6$
$a = 8$	$x = 2$
$a = 9$	$x = 8$
$a = 0$	$x = 4$

заметим, что никакой x из списка не совпадает, а значит числа больше двузначных (~~трёхзначн.~~) не подходят т.о. ~~не~~ подходят только

12 24 36 42

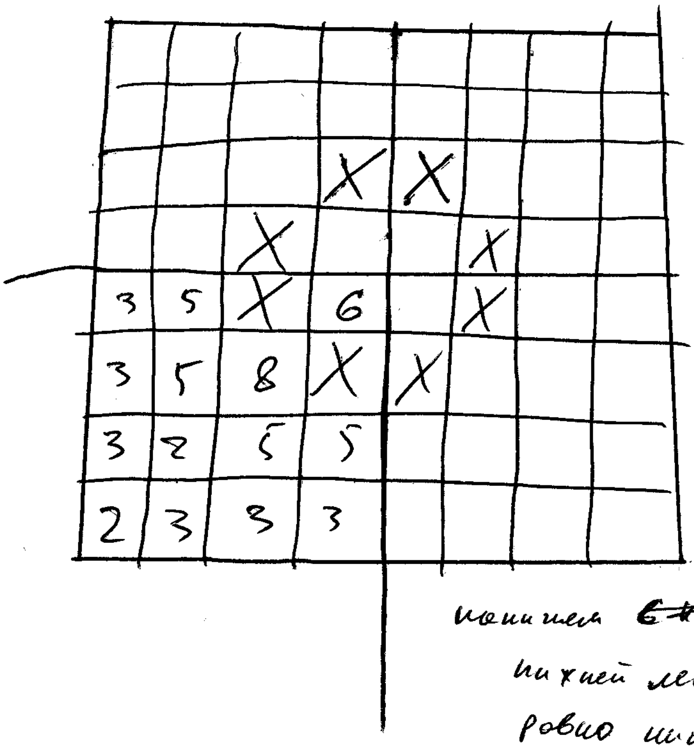
Ответ: {12, 24, 36, 48}

чистовик лист 3

5 задача

Ответ: 8 коней

пример



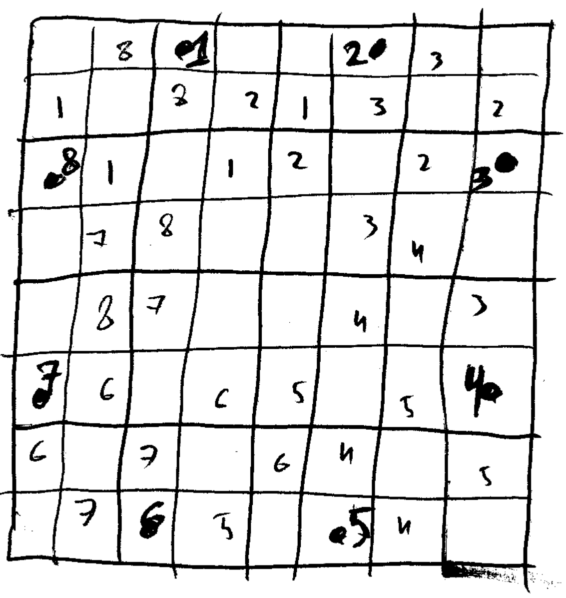
X — нет коня

пустое поле или цифра, конь стоит

напишем ~~в~~ в каждой клетке нижней левой четверти, число, которое равно числу коней, которые бьет конь в этой клетке. Понятно, что картинка симметрична, и ~~в ост~~ если в этой четверти нет числа 4, то и в других тоже нет.

Действительно, ни один конь не бьет 4 ~~коней~~ других коня.

оценка



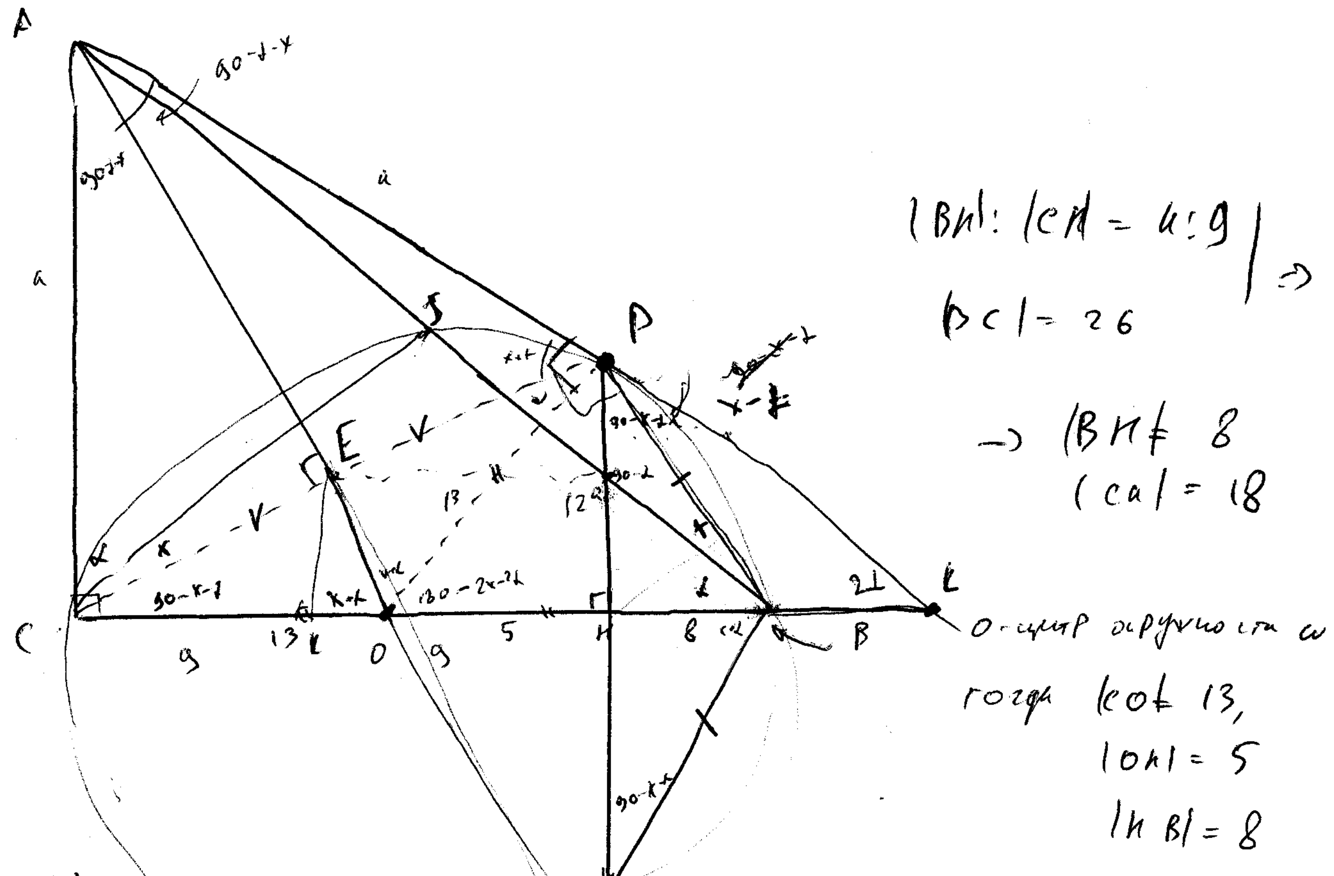
если мы рассмотрим коней, обозначенных точкой, то.

Каждый из них изначально бьет ровно 4 клетки, и ~~так~~ никакую клетку не бьют одновременно хотя бы 2 таких коня, а значит, чтобы условие выполнялось для каждого коня нам нужно надо убрать хотя бы 1 клетку* для ~~кон~~ коня, либо самого коня. а т.к. таких коней 8, то и клеток нужно убрать минимум 8.

(* убрать клетку значит убрать коня, стоящего на этой клетке)

Ответ: 8 коней.

Задача № 4



$|BH| : |CH| = 4 : 9$, $|BC| = 26$ ⇒ $|BH| = 8$, $|CH| = 18$

O – центр окружности ω

тогда $|CO| = 13$, $|OH| = 5$, $|HB| = 8$

чистовая лист 4.

$\triangle$ BPC — прямоугольный т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow$ $|PO| = 13$ — как медиана к гипотенузе

тогда в $\triangle$ OHP $\left.\begin{matrix} |OH| = 5 \\ |OP| = 13 \\ \triangle OHP \text{ — прямоуг} \end{matrix}\right| \Rightarrow |PA| = 12$

и тогда $S_{\triangle PAB} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48.$

тогда из теоремы пифагора $|CP| = \sqrt{468}$
$|PB| = \sqrt{208}$

обозначим $\angle QBP = x$
$\angle APC = \alpha$ тогда $\angle SCP = x$

$(BP) \perp (AK)$ как касательная

$\angle APF = 90 - x - \alpha \Rightarrow \angle PFB = 90 - x - \alpha.$

тогда $(AE) \parallel (PB)$ т.к. $\angle CPB = 90^{\circ}$

из подобия отрезок $|QA| = a \cdot \frac{8}{26} = \frac{a \cdot 4}{13}$

(*)
$|CE| = \frac{\sqrt{468}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow |EK| =$
$\sqrt{\frac{468}{4} - 81} \sqrt{117 - 81} =$
$=$

$\angle ACP = \alpha$ т.к. $\angle CBS = \alpha$
т.к. E — центр CP — из-за того, что $\angle CAE = \angle EAP$
$(AE) \perp (CP)$

$\frac{|PQ|}{|QA|} = \frac{1}{1} \Rightarrow S_{\triangle PQB} = S_{\triangle AQB} = \frac{1}{2} S_{\triangle PAB}.$

тогда $S_{\triangle PQB} = \frac{48}{2} = 24$

Ответ: $S_{\triangle QPB} = 24$

(*) $|CE| = \frac{CP}{2} = \frac{\sqrt{468}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad CK = \sqrt{\frac{468}{4} - 81} = \sqrt{117-81} =$

$= \sqrt{36} = 6.$ значит ~~$|KQ| = 6$~~

$|KQ| = \frac{1}{2}|PK| = 6$