№3.

Если все $x_i, y_i$ равны между собой,

то $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) \le 2$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) = 2nx_1^2 \le 2.$

$x_1^2 \le \frac{1}{n}$ $|x_1| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

Тогда $A = \left(2\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 2\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = n\cdot x_1 \cdot 3n\cdot x_1 =$

$= 3n^2\cdot x_1^2 \le 3\cdot n^2 \frac{1}{n} = 3n.$

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

9441 1 66

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Краснодар

Дата 02.03.2017

****************************************************************************

## Вариант 3

1. Ожерелье состоит из 100 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что среди любых пяти бусинок, идущих подряд, есть хотя бы одна синяя, а среди любых семи, идущих подряд, — хотя бы одна красная. Какое наибольшее количество зелёных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну из цифр (не старшую). В результате число уменьшилось в 9 раз. Сколько существует чисел, для которых это возможно?
3. Числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию $x_1^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+\ldots+y_n^2 \leqslant 2$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \left(2(x_1+\ldots+x_n) - y_1 - \ldots - y_n\right)\cdot\left(x_1+\ldots+x_n+2(y_1+\ldots+y_n)\right).$$
4. В треугольник $ABC$ вписана окружность $\omega$ радиуса $r$, которая касается стороны $AB$ в точке $X$. На окружности отметили точку $Y$, диаметрально противоположную точке $X$. Прямая $CY$ пересекает сторону $AB$ в точке $Z$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если известно, что $CA + AZ = 1$.
5. Квадрат $4\times 4$ разбит на 16 квадратов $1\times 1$. Назовем *путем* перемещение по сторонам единичных квадратов, при котором ни одна из сторон не проходится дважды. Какую наибольшую длину может иметь путь, соединяющий две противоположные вершины большого квадрата?
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 32, 48 и 48, а углы при вершине — $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). Над столом подвесили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от центров оснований всех конусов. Найдите радиус шара.

№1.

Покажем, что красных бусинок не меньше 15.

~~Пусть~~ Предположим, наше кол-во бусинок их меньше 15. ~~Расстояние~~ между любыми двумя соседними красными бусинками (соседними назовём бусинки между которыми нет других красных) ~~хотя бы 6, иначе~~ не больше 6, иначе между ними есть 7 подряд идущих, среди которых нет красных. Тогда всего у нас бусинок в ожерелье не больше, чем $14+6\cdot14=7\cdot14=98$ (Красных бусинок 14 или меньше, ~~расстояний~~ промежутков между соседними 14 или меньше, бусинок в промежутке 6 или меньше). Но по условию у нас 100 бусинок в ожерелье. Противоречие. Наше предположение не верно.

Синих бусинок не меньше 20, доказывается аналогично (Предположим 19 или меньше, промежутков ~~между двумя синими~~ от синего до синего, где нет синих внутри тоже 19 или меньше, внутри таких промежутков не больше 4 бусинок => Кол-во бусин не больше $19+19\cdot4=19\cdot5=95$ - противоречие).

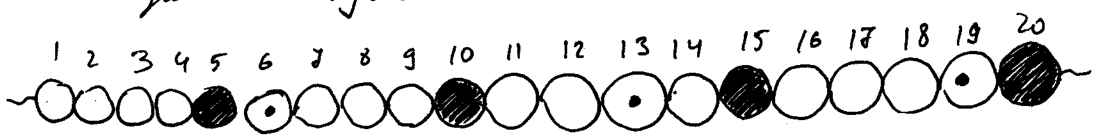
Итак, незеленых бусин не меньше, чем $15+20=35$, значит зелёных не больше, чем $100-35=65$.

Пример.

● - синяя ~~нур~~ бусина

⊙ - красная бусина

○ - зелёная бусина




~~Всего~~ Ожерелье состоит из 4 таких одинаковых звеньев.

В нем $4\cdot5=20$ синих, $3\cdot5=15$ красных бусинок => 65 зелёных.

Оно удовлетворяет условию, т.к между любыми 2-мя соседними синими не больше 4 (ровно 4) бусин другого цвета => нет 5 подряд идущих синих, и между красными не больше 6 бусин.

* Между соседними бусинами (бусиной, соотв №6, и бусиной, соотв №19) из ~~соседних~~ прилыкающих друг к другу двадцаток тоже не больше 6 бусин 1 (№20) из двадцатки с бусиной, соотв №19, и 5 (№1,2,...,5) из двадцатки с бусиной, соотв №6.

№2.

Покажем, что стёрли не последнюю цифру.

Предположим, что стёрли последнюю. Пусть эта цифра B, а наше число $\overline{AB}$ или $A\cdot10+B$. Когда стерли B, получилось число A, причём $9A=A\cdot10+B \Rightarrow A+B=0$. A - (т.к. B - не старший разряд числа, $A\neq0$) положительное, $B\neq0 \Rightarrow$ тоже положительное $\Rightarrow A+B>0$ - противоречие.

Чему тогда могла равняться последняя цифра?

Пусть N - исходное число, M - полученное.

Если последняя цифра M равна 1, то последняя цифра N равна $(9\cdot1 \bmod 10)=9$. Если 2, то ~~8. Если~~ $(2\cdot9=18\equiv_{10}8$

Если n, то $n\cdot9 \bmod 10$. $n\cdot9\equiv_{10}10\cdot n-n\equiv_{10}-n\equiv_{10}10-n$

Т.к последние цифры M и N одинаковые, то ~~$n=10-n \Rightarrow n=5$~~. $n\equiv_{10}-n$ $n=0$, $n=5$. $n=0$ не подходит по усл.

$n=5$. Т.к последняя цифра N и M равна 5, то числа N и M делятся на 5 и нечётны.

Пусть $N=9\cdot5\cdot x$, $M=5\cdot x$, где x - нечетно.

~~Также пусть~~ $\cancel{N=A\cdot10^k+B\cdot10^{k-1}+C}$, $\cancel{M=A\cdot10^{k-1}+C}$, ~~где B - зачеркнутая цифра, A сост. из цифр до неё в числе N, а C - после.~~

~~Ещё мы знаем, что~~ $\cancel{M=\frac{N-B\cdot10^{k-1}-C}{10}+C}$

~~Докажем, что при~~ $\cancel{x>9}$

$\cancel{\frac{9\cdot5\cdot x-B\cdot10^{k-1}-C}{10}+C<5x}$

$\cancel{45x-B\cdot10^{k-1}-C+10C<50x}$

$\cancel{9C-B\cdot10^{k-1}<5x}$

$\cancel{9C-B\cdot10^{k-1}<9\cdot C<9\cdot10^{k-1}}$

~~$C<10^{k-1}$, т.к. C состоит из k-1 цифры (C правее, чем B, стоящая на k разряде).~~

$x=1$ $N=45$; $M=5$ не подходит, т.к 4 в старшем разряде

1. $x=3$ $N=135$; $M=15$ подходит ✓
2. $x=5$ $N=225$; $M=25$
3. $x=7$ $N=315$; $M=35$
4. $x=9$ $N=405$; $M=45$

$x>9$ не подходит

$x=11$ $N=495$ $M=55$, $x=13$ $N=585$ $M=65$ } - не подходят.

=> $x>9$ не подходит, т.к. $N_n=N_{n-1}+90$, $M_n=M_{n-1}+10$, N растёт медленнее, чем M, поэтому первые несколько разрядов N будут меньше, чем первые несколько разрядов M.

Ответ: 4

~~$x=11$ $N=495$ $M=55$, $x=13$ $N=585$ $M=65$ } не подходят~~

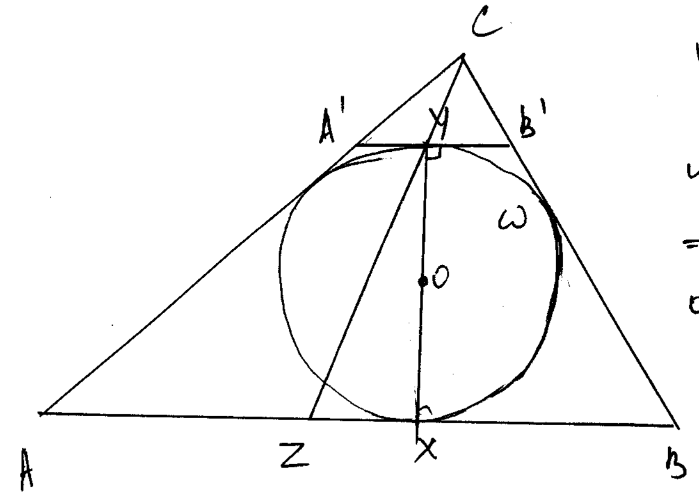
~~$N_n=N_{n-1}+90$ $M_n=M_{n-1}+10$.~~

~~Положим $Q=\frac{N-5}{10}$ и $P=\frac{M-5}{10}$~~

~~$Q_n=Q_{n-1}+9$ $P_n=P_{n-1}+1$, причём $P_n$ - это $Q_n$ с 1 зачеркнутой цифрой~~

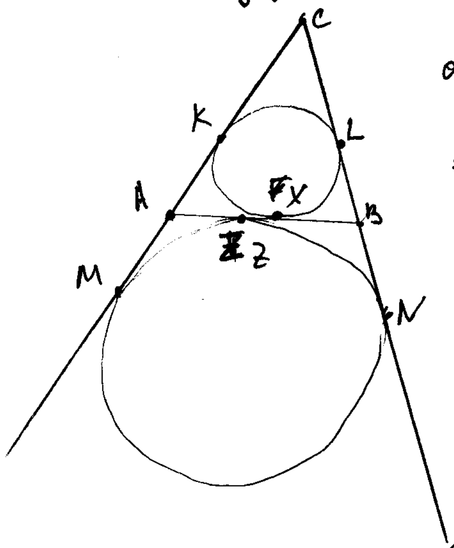
Чистовик

№4




Проведем $A'B'$ через $Y$ параллельно $AB$. т.к $YX \perp AB$, то $YX \perp A'B'$ и $Y$-точка касания прямой $A'B'$ $\Rightarrow$ $Y$ - точка касания вневпис окружности $\triangle A'B'C$ ($\omega$ касается $AC$, $CB$ и $A'B'$).

т.к $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ и они отличаются друг от друга гомотетией с центром в точке $C$, то точка касания вневпис. окружности $\triangle ABC$ стороны $AB$ будет лежать на $CY$ и на $AB$ $\Rightarrow$ это точка $Z$.




~~2AF=AE~~

отрезки касательных равны

$$\Rightarrow XB = \frac{XB+LB}{2} = \frac{XB+XA-XA+BL+LC-LC}{2} =$$

$$= \frac{AB-XA+BC-LC}{2} = \frac{AB+BC-AK-KC}{2} = \frac{AB+BC-AC}{2}.$$

$$AZ = AM = CM - CA = CN - CA = (CB+BN) - CA =$$

$$= CB + BZ - CA = CB + BA - AZ - CA$$

$$AZ = \frac{CB+BA-CA}{2} = \frac{AB+BC-AC}{2}$$

$$AZ = \frac{AB+BC-AC}{2} = XB$$

$$AC + AZ = AC + XB = AK + KC + XB = \frac{AK+AX}{2} + \frac{KC+CL}{2} + \frac{XB+BL}{2} = \frac{AB+BC+CA}{2}$$

$\Rightarrow AC + AZ = p$, $p$ - полупериметр.

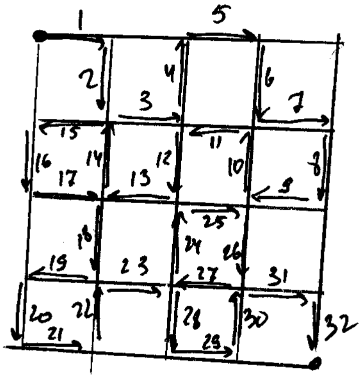
$S = r \cdot p = r \cdot 1 = r$

Ответ: $r$.

№5

Ответ: 32

пример



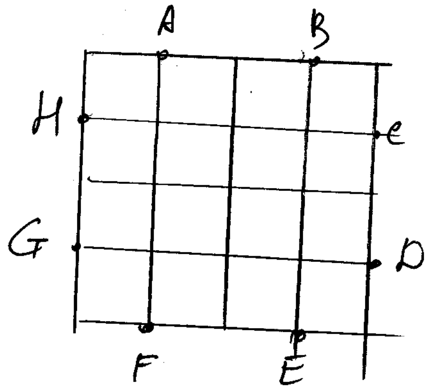




рис 2.

Заметим, что по 3 сторонам квадратиков, выходящим из любой из выделенных на рис 2 точек за один путь пройти невозможно. Предположим обратное. Обозначим ~~пройденную~~ направление по которому мы идём стрелочкой, тогда кол-во входящих и выходящих из такой точки стрелочек будет различным, т.к 3 нечётно, а т.к проходить по одному ребру дважды мы не можем, то, чтобы „зайти" в точку и „выйти" из неё нужна пара ребер (сторон квадратиков, по к-рым мы ходим): одно входящее и одно выходящее. Тогда мы либо начнем, либо закончим путь в одной из этих точек, что противоречит условию.

Т.к таких точек у нас 8, из каждой ведёт ребро, по к-му мы не прошли, и множества этих ребер не пересекаются, то хотя бы по 8 ребрам мы не пройдём => любой путь проходит через 40-8=32 или меньше рёбер.

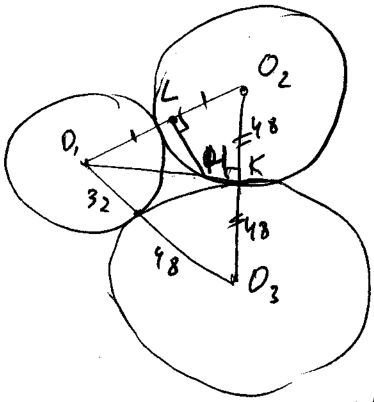
* рёбра - стороны квадратиков, если мы представим задачу как хождение по графу, где вершины квадратиков вершины, а стороны - ребра.

Чистовик

№6

~~Рассмотрим~~ расстояние от центра ~~окр~~ шара до центров оснований какого-либо конуса ~~всех или конусов~~ равно корню из ~~квадр~~ суммы квадратов расстояний от центра шара до стола и от осн. проекции центра шара ~~до~~ на стол до центра конуса => расстояния от ~~осн.~~ проекции центра шара на плоскость стола до центров конусов равны, т.к ~~рас~~ центр шар от центров осн. конусов равноудалён.

Рассмотрим плоскость стола




Проекция центра шара лежит в центре окр, опис. около $\Delta O_1O_2O_3$ со сторонами $r_1+r_2$, $r_2+r_3$ и $r_1+r_3$ $(32+48,\ 32+48,\ 48+48)$.

=> $(80,\ 80,\ 96)$.

Найдем радиус этой окр.

$\sin O_2O_1K = \frac{O_2K}{O_1O_2} = \frac{48}{80} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ => $\cancel{\sin O_2O_1K = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}}$

$\cancel{\sin O_2O_1K = \frac{O_1L}{O_1H} = \frac{\frac{80}{2}}{x} = \frac{3}{5}}$

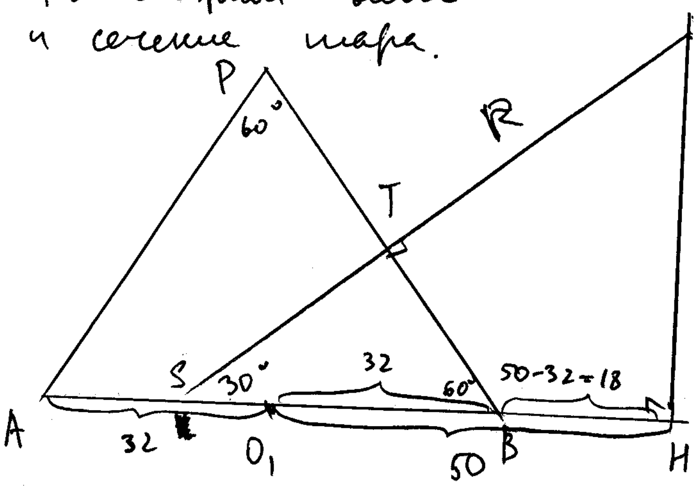
$\cancel{x = \frac{80\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{40\cdot 5}{3} = \frac{200}{3}}$

$\cos O_2O_1K = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} = \cos O_2O_1K = \cos HO_1L = \frac{O_1L}{O_1H} = \frac{\frac{80}{2}}{O_1H}$

$O_1H = \frac{80\cdot 5}{2\cdot 4} = 50$.

Рассмотрим осевое сечение конуса радиуса 32 с точкой касания шара и сечение шара.




$\angle PBA = 60°$, т.к $\Delta APB$ равносторонний ($AP = PB$, и $\angle APB = 60°$).

=> $\angle STB = 90° - 60° = 30°$

Пусть $TB = t$, тогда $ST = TB\cdot\sqrt{3} = t\sqrt{3}$

$SB = 2\cdot TB = 2t$

$\Delta OHS$ — прямоуг с углом $OSH = 30°$

$\frac{SH\cdot\sqrt{3}}{2} = SO$

$\frac{(18+2t)\sqrt{3}}{2} = R + t\sqrt{3}$

$9\sqrt{3} + t\sqrt{3} = R + t\sqrt{3}$

$R = 9\sqrt{3}$.

Ответ: $9\sqrt{3}$.