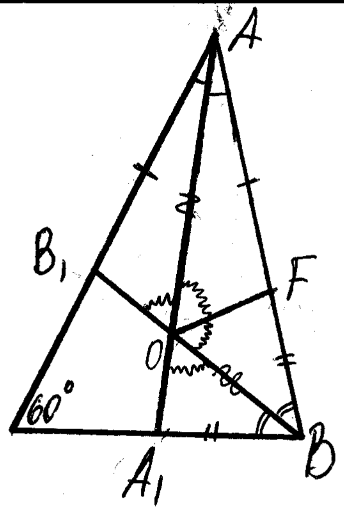
№3

$AF = AB_1$,
$F \in AB$



$\triangle AOF = \triangle AOB_1$, (I пр.) $\Rightarrow \angle AOF = \angle AOB_1$

$\angle C = 60° \Rightarrow \angle A + \angle B = 120° \Rightarrow \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAO + \angle ABO = 60° \Rightarrow \angle AOB = 120° \Rightarrow \angle AOB_1 = 60° \Rightarrow \angle AOF = 60°$

$\angle AOB = 120°$ $\Big] \Rightarrow \angle FOB = 60°$

$\angle A_1OB = \angle AOB_1 = 60°$

$\angle BOF = \angle BOA_1 = 60°$
BO - общая
$\angle OBF = \angle OBA_1$ $\Big] \Rightarrow \triangle BOF = \triangle BOA_1$ (II пр.) $\Rightarrow BF = BA_1$

$AB = AF + FB = AB_1 + BA_1$ ч.т.д.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

5904 60

ЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8-9 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Челябинск

Дата 22.02.2017

****

Вариант 1

1. На острове живут два племени: племя рыцарей, которые всегда говорят правду, и племя лжецов, которые всегда лгут. На главный праздник за большим круглым столом разместились 2017 островитян. Каждый житель острова произнес фразу: «мои соседи из одного племени». Оказалось, что двое лжецов ошиблись и случайно сказали правду. Сколько лжецов может сидеть за этим столом?

2. Докажите, что для любых положительных чисел $x < y$ справедливо неравенство $x + \sqrt{y^2+2} < y + \sqrt{x^2+2}$.

3. В треугольнике ABC с углом $\angle C = 60°$ проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что $AB_1 + BA_1 = AB$.

4. Даны целые числа a и b, не равные -1. Квадратный трехчлен

$$x^2 + abx + (a+b)$$

имеет два целых корня. Докажите, что $a + b \leqslant 6$.

5. В каждой клетке доски 2017×2017 лежит фишка. За одну операцию можно снять с доски фишку, у которой ненулевое четное число соседей (соседними считаются фишки, расположенные в клетках, примыкающих друг к другу по стороне или углу). Какое наименьшее количество фишек можно оставить на доске с помощью таких операций?

6. Назовем делитель d натурального числа $n > 1$ *хорошим*, если $d + 1$ также является делителем n. Найдите все натуральные n, у которых не менее половины делителей являются хорошими.

№1

Хотя бы 2 лжеца за столом есть (по условию)

Все люди не могли быть лжецами, т.к. тогда ошибётся более 2 лжецов.

Т.к. рыцари не ошибались, около них сидели либо 2 рыцаря, либо 2 лжеца. 1 случай невозможен, т.к. тогда все аборигены являются рыцарями. => около рыцаря сидят 2 лжеца.

Около лжецов (не ошибавшихся) сидит 1 рыцарь и 1 лжец.

Около ошибавшихся лжецов сидит либо 2 рыцаря, либо 2 лжеца.

Без ошибавшихся лжецов:

ЛРЛ
РЛЛ
ЛЛР | => вся последовательность: ... ЛРЛЛРЛЛРЛЛРЛ...

Разделим её на группы в направлении часовой стрелки:

$\underbrace{\text{РЛЛ}}\ \underbrace{\text{РЛЛ}}\ \underbrace{\text{РЛЛ}}\ \underbrace{\text{РЛЛ}}\ \underbrace{\text{РЛЛ}}$

С ошибавшимися лжецами:

или РЛР => РЛЛРЛРЛЛРЛ

ЛЛЛ => РЛЛРЛЛЛРЛ

Здесь группы будут РЛ или РЛЛЛ.

Подсчитаем кол-ва людей за столом:

$3k + s = 2017$

$3k$ - кол-во людей в группах РЛЛ, k - кол-во таких групп.

s - кол-во людей в группах РЛ или РЛЛЛ.

$$\left[\begin{array}{l} s=4 \\ s=6 \\ s=8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3k+4=2017 \Rightarrow k=671 \\ 3k+6=2017 \Rightarrow k=670\frac{1}{3} \\ 3k+8=2017 \Rightarrow k=669\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

=> кол-во групп РЛЛ равно 671, также есть 2 группы РЛ. Кол-во лжецов равно $671\cdot 2+2\cdot 1=1344$.

Ответ: 1344 лжеца.

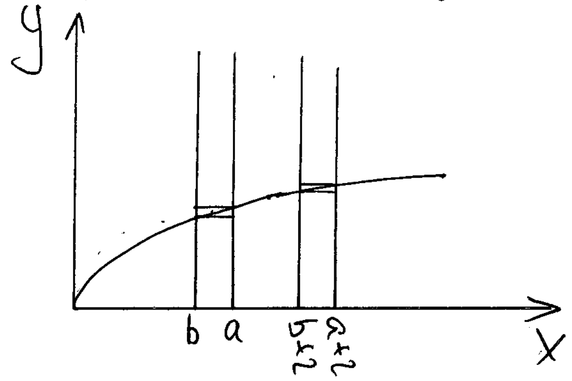
№2

$x_1 = x^2,\ y_1 = y^2.$

$\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1+2}<\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1+2}$ (Понятно, что $\sqrt{x_1}<\sqrt{y_1}$, $\sqrt{x_1+2}<\sqrt{y_1+2}$)

$\sqrt{y_1}-\sqrt{x_1}-(\sqrt{y_1+2}-\sqrt{x_1+2})>0$

По графику $y=\sqrt{x}$ видно, что $\sqrt{a}-\sqrt{b}>\sqrt{a+2}-\sqrt{b+2}$, где $a>b$ =>



=> $\sqrt{y_1}-\sqrt{x_1}>\sqrt{y_1+2}-\sqrt{x_1+2}$ => $\sqrt{y_1}-\sqrt{x_1}-(\sqrt{y_1+2}-\sqrt{x_1+2})>0$ =>

=> $\sqrt{y_1}+\sqrt{x_1+2}>\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1+2}$ =>

$x+\sqrt{y^2+2}<y+\sqrt{x^2+2}$ ч.т.д.

№4

$x^2+abx+(a+b)=0$

$(x-x_1)(x-x_2)=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-ab \\ x_1 x_2=a+b \end{cases}$$

$D=a^2b^2-4(a+b)>0$

$a^2b^2>4(a+b)$

№5

Если на поле 2 клетки, то никакую из них нельзя убрать => останется как минимум 2 клетки.

Если на поле n неубранных замкнутых областей (площадь которых >1) и k неубранных фишек, у которых 0 соседей, то кол-во фишек в конце игры больше или равно $2n+k$.