УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6319 1 85

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 4.03.2017

**************************************************************************

## Вариант 10

1. За круглым столом сидят 50 школьников: блондины, брюнеты и рыжие. Известно, что в любой группе сидящих подряд школьников между двумя блондинами есть хотя бы один брюнет, а в любой группе между двумя брюнетами — хотя бы один рыжий. Какое наименьшее количество рыжих может сидеть за этим столом?

2. У 200-значного натурального числа стерли старшую цифру и цифру, стоящую через одну от нее. В результате число уменьшилось в 44 раза. Найдите все числа, для которых это возможно.

3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}.$$

4. Внутри угла раствора $30^\circ$ с вершиной $A$ выбрана точка $K$, расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку $K$ проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальную площадь треугольника, отсекаемого прямой от угла.

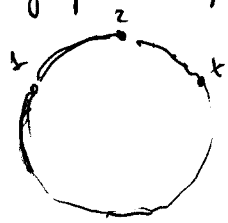
5. В клетках таблицы $75 \times 75$ расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них имеет не более трех различных простых делителей. Известно, что для любого числа $a$ из таблицы в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число $b$, что $a$ и $b$ не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?

6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол положили шар радиуса 2, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите $r$.

Чистовик.

№1 Пусть блондинов за столом $x$. Т.к. в любой группе сидящих подряд школьников между двумя блондинами есть хотя бы один брюнет, то рассмотрим группы, образованные ~~[illegible]~~ двумя ближайшими блондинами т.е. между ними нет блондинов. (т.е. группы, где только два блондина — один вначале, другой в конце)

Если на окружности $x^{v}$ точек, то окр-сть поделена на $x$ дуг, внутри которых нет точек (отмеченных)
отмеч.



Т.к. в любой такой группе есть хотя бы один брюнет т.е. на каждой нашей дуге будет хотя бы один брюнет $\Rightarrow$ брюнетов $\geq x$ то есть не меньше блондинов.

Аналогично, меняя блондинов на брюнетов, а брюнетов на рыжих получаем, что рыжих не меньше брюнетов $\Rightarrow$ бл $\leq$ бр $\leq$ рыж

т.е. кол-во рыжих минимально, когда всех ~~по ро~~ поровну по $x$, сумма $3x$

но в сумме их $50 \not\vdots\, 3$ $\Rightarrow$ их не поровну.

Пусть ~~брюнетов~~ рыжих $x+1$, а бр и бл по $x$; сумма $3x+1=50$ $49 \not\vdots\, 3$

$\Rightarrow$ такой вариант не подх. пусть бр $-$ $x+1$, тогда и рыж миним. $x+1$, блондинов $x$; $3x+2=50$ $x=16$ $\Rightarrow$ рыжих $x+1=16+1=17$

реализация?

Ответ: 17

№2 данное 200-знач число: $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{200}}$ $\overline{a_4\ldots a_{200}}=x$

(1)

$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{200}} = 44\cdot\overline{a_2a_4\ldots a_{200}} \iff \overline{a_1a_2a_3}\cdot 10^{197}+x = 44\cdot a_2\cdot 10^{197}+44x$

Р-м разряды с 1 по 196 у числа слева:

т.к. $\overline{a_1a_2a_3}\cdot 10^{197}$, то на первые 196 разрядов эта часть не влияет и определяется только $x$

у числа справа $44\cdot a_2\cdot 10^{197}$ — не влияет, определяется $44x$

Т.е. ~~x~~ ~~44~~ разряда с 1 по 196 у $x$ и $44x$ равны

$x=\overline{a_4\ldots a_{200}}$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rrr} & a_4\ldots a_{199} & a_{200} \\ \times & 4 & 4 \\ \hline 4a_5 & 4a_{200} & 4a_{200} \\ 4a_4 & 4\cdot a_{199} & \\ \hline \ldots a_4 & a_{199} & a_{200} \end{array}$$

т.е. $4a_{200}$ и $a_{200}$ оканч. на одну цифру, такое возможно только если $a_{200}=0$

(т.к. $4\cdot1=4$ $4\cdot4=16$ $4\cdot7=28$
$4\cdot2=8$ $4\cdot5=20$ $4\cdot8=32$
$4\cdot3=12$ $4\cdot6=24$ $4\cdot9=36$)

№2 (прод.) Получ. $4(a_{199}+a_{200})$ и $a_{199}$ оканч. на одну цифру $a_{200}=0 \Rightarrow$

$4a_{199}$ и $a_{199}$, аналогично $a_{199}=0$, продолжая эту операцию получаем, что $a_{198}=0 \ \dots \ a_4=0$ (т.к. для всех $4(a_n+a_{n+1})$ и $a_n$ оканч на одну цифру $a_{n+1}=0$ $\quad 4a_n, a_n \Rightarrow a_n=0$ т.е $x=0$

$(1) \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3}\cdot 10^{197} = 44\cdot a_2\cdot 10^{197} \Leftrightarrow \overline{a_1a_2a_3} = 44a_2 = 100a_1+10a_2+a_3$

$100a_1 - 34a_2 + a_3 = 0$

Или $\overline{a_1a_2a_3} \vdots 44 \Rightarrow a_1 - a_2 + a_3 \vdots 11$

$\vdots a_2 \qquad \overline{a_2a_3} \vdots 4$

$a_2 \neq 0$ т.к. тогда бы все число равнялось и не было 200ти знач.

Пусть $a_1 = 1$, тогда

$a_3 \in N \quad a_3 = 34a_2 - 100$

$0 \le 34a_2 - 100 \le 9$

$100 \le 34a_2 \le 109$

$2{,}9 \le a_2 \le 3{,}1$

$a_2 = 3 \Rightarrow a_3 = 2$

$\overline{a_1a_2a_3} = 132$

Пусть $a_1 = 2 \Rightarrow 0 \le a_3 = 34a_2 - 200 \le 9$

$\frac{200}{34} = 5{,}8 \le a_2 \le \frac{209}{34} = 6{,}1$

$a_2 = 6 \quad a_3 = 4$

$\overline{a_1a_2a_3} = 264$

Пусть $a_1 = 3$, $\Rightarrow a_3 = 34a_2 - 300$

$\frac{300}{34} = 8{,}8 \le a_2 \le \frac{309}{34} = 9{,}08$

$a_2 = 9 \quad a_3 = 6$

$\overline{a_1a_2a_3} = 396$

Пусть $a_1 \ge 4 \Rightarrow 34a_2 - a_3 \ge 400 \quad a_3 \le 34a_2 - 400$

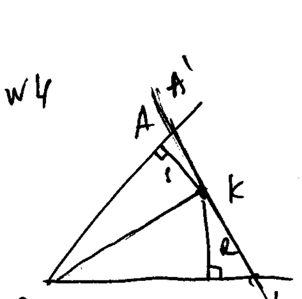
$a_3 \le 34a_2 - 400$

но $a_2 \le 9 \Rightarrow 34a_2 \le 306 \Rightarrow$

при $a_1 \ge 4$ $a_3$ – отриц. $\varnothing$.

Ответ: $132\underbrace{00\dots0}_{197}$, $264\underbrace{0\dots0}_{197}$, $396\underbrace{0\dots0}_{197}$.

№4




Дано $\angle ACB = 30^\circ$

$AK = 1$

$BK = 2$

Через $K$ – проведена прямая $l$.

Пусть $l$ отсекает от прямой $CA$ отрезок $CA'$, а от $CB$ отсек $CB'$

Тогда $S_{A'CB'} = \frac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ\cdot CA'CB'$

Нигде не пользуемся расположением $C, A, A'$ и $C, B, B'$ на соотв. прямых $\Rightarrow$ т.е. они могут располагаться не так как на картинке.

Но $S_{A'B'C} = S_{CKA'} + S_{CKB'} = \frac{1}{2}\cdot \overset{\text{высота}}{AK}\cdot \overset{\text{осн.}}{CA'} + \frac{1}{2}\cdot BK\cdot CB'$

$\Rightarrow \sin 30^\circ CA'CB' = AK\cdot CA' + BK\cdot CB'$, $CA' = x$, $CB' = y$

?

$\frac{1}{2}\cdot xy = x + 2y \Leftrightarrow xy = 2x + 4y \quad y = \frac{2x}{x-4}$

Чистовик.

Продолжение 4.

$S_{A'B'C} = \frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ \cdot CA' \cdot CB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2x}{x-4} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4x+4x-16+16}{x-4}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(x+4+\frac{16}{x-4}\right)$ Возьмём производную чтобы найти минимум

$S'_{A'B'C} = \frac{1}{2}\left(x+4+\frac{16}{x-4}\right)' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{16}{(x-4)^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{16}{(x-4)^2}$ $(x-4)^2 = 16$ $x = \left[\begin{matrix}0\\8\end{matrix}\right.$ Рассмотрим знак

производной $\xrightarrow[0 \qquad 8]{+ \quad - \quad +} x$ т.к длина неотриц то $x>0$

минимум в т $x=8$ т.к. до нее ф-я убыв, а потом возраст.

$\Rightarrow y = \frac{2x}{x-4} = \frac{16}{4} = 4$ $S_{A'B'C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 8$

Ответ: 8.

№3 $(x_1 \dots x_n) \in (0;1)$ $A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1}+\dots+\sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}$

Среднее гармонич. чисел $\sqrt[4]{x_i}$; i от 1 до n $G = \frac{n}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}} \le \sqrt[4n]{x_1 \dots x_n}$ меньше или равно среднего геометрического по нер-ву о средних и достигает своего максим. знач, когда $\sqrt[4]{x_1} = \sqrt[4]{x_2} = \dots = \sqrt[4]{x_n}$ т.е. среднее гарм = сред. геом. $x_1 = x_i = \dots = x_n$ т.к. $(x_1 \dots x_n) \in (0;1)$

Среднее арифм. чисел $\sqrt[4]{1-x_i}$, i от 1 до n $B = \frac{\sqrt[4]{1-x_1}+\dots+\sqrt[4]{1-x_n}}{n} \le \sqrt{\frac{\sqrt[2]{1-x_1}+\dots+\sqrt[2]{1-x_n}}{n}}$ меньше или равно средне квадратич. по нер-ву о средних и максимум

? $\Big\{$ т.е. равенство ср. квадр при $\sqrt[4]{1-x_1} = \sqrt[4]{1-x_2} = \dots = \sqrt[4]{1-x_n}$ $\Rightarrow x_1 = x_i = x_n$ т.к. $(x_1 \dots x_n) \in (0;1)$

$A = B \cdot G = \frac{\sqrt[4]{1-x_1}+\dots+\sqrt[4]{1-x_n}}{n} \cdot \frac{n}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}$ и максимум B, G дости. при $x_1 = x_i \dots = x_n$

$\Rightarrow$ max A тоже при таких усл-их $x := x_i = x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$A = \frac{n\sqrt[4]{1-x}}{\frac{n}{\sqrt[4]{x}}} = \sqrt[4]{(1-x)(x)}$; Возьмём произв, что найти макс при $x \in (0;1)$

$\cancel{A' = \left((x-x^2)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}(1-2x)}$ $\cancel{f(y) = y^{\frac{1}{4}} \quad f'(y) = \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} > 0 \text{ при } y > 0}$

$\cancel{y = x - x^2 > 0 \text{ при } x \in (0;1) \text{ т.к } 1-x>0 \text{ и } x>0}$

Продолж. 3. $\Rightarrow \max \sqrt[4]{x-x^2}$ ~~там же, где и~~ ~~$\max(x-x^2)$~~ $(x\in(0;1))$

~~т.к. $f(y)=y^{\frac14}$ - монотонна~~

Т.К. $x-x^2>0$ то и $(x-x^2)^{-\frac34}>0$

$$\left(\sqrt[4]{x-x^2}\right)' = \frac14(1-2x)\cdot(x-x^2)^{-\frac34}=0 \iff 1-2x=0$$

$x=\frac12$ $\xrightarrow[\frac12]{+ \quad \circ \quad -}$ знак произв т.е. в $\frac12$ максимум

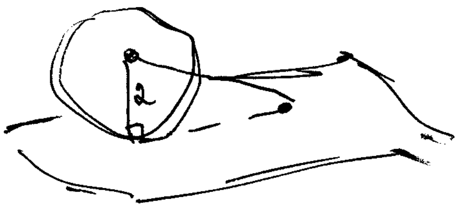
(до нее ~~убыв~~ возр; после убыв) $A=\sqrt[4]{(1-x)x}=\sqrt[4]{\frac14}=\frac{1}{\sqrt2}$

Ответ: $\max A=\frac{1}{\sqrt2}$.

№6 1) Центр шара равноуд. от точек касания конусов

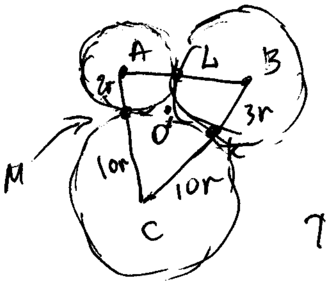
это расст. складывается по т. Пифагора из расст. от центра шара до стола и расст. от точек касания (кот. в пл-ти стола) до ортог. проекц. центра шара в пл-ть шар~

т.к. расст. от центра шара до стола один. и центр равноуд от т касания то и расст. от точек касания до проекции одинаково




2) Проекция в пл-ть стола. O' - проекция центра шара

A, B, C - проекц. вершин конусов




K, L, M - точки касания лежат на прямых, соед. центры окружностей (оснований конусов)

$\Rightarrow$ O' - центр вписанной в $\triangle ABC$ окр.

Тогда $S_{ABC}=\underbrace{\sqrt{15r\cdot 2r\cdot 3r\cdot 10r}}_{\text{формула Герона}}=30r^2=\underbrace{15r\cdot O'K}_{\text{полупериметр на радиус}}$

$\Rightarrow O'K=O'L=O'M=2r$

3) т.к. радиусы в т.касания $\perp$ стороне из т. Пифагора находим

$O'A=\sqrt{AM^2+O'M^2}=\sqrt{4r^2+4r^2}=2\sqrt2 r$

$O'B=\sqrt{BK^2+KO'^2}=\sqrt{4r^2+9r^2}=r\sqrt{13}$

$O'C=\sqrt{O'K^2+KC^2}=\sqrt{4r^2+100r^2}=r\sqrt{104}=2r\sqrt{26}$

4) Р.м. точки касания шара и конусов

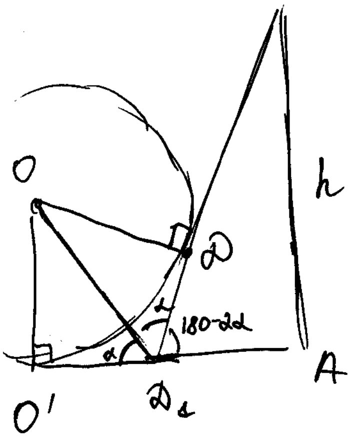
конус 2r

На след стр ↓

Чистовик

Чистовик.

Пл-ть в кот. лежит центр шара, т. касания ~~его~~ с конусом 2r и вершина конуса ; h - высота конуса




$OД$, $OO'$ - рад. в т касания и $Д_1Д$ и $Д_1O'$ - кас.

Из одной точки $\Rightarrow \Delta OД_1O' = \Delta OД_1Д$,

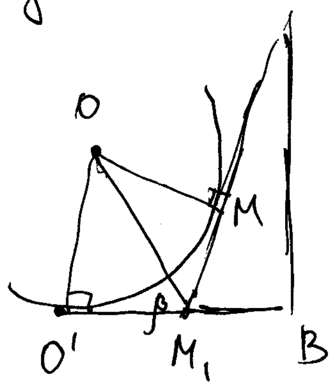
$$tg(180-2\alpha) = \frac{h}{2r} \Rightarrow tg\,2\alpha = -\frac{h}{2r} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow tg^2\alpha\cdot h - h = 4tg\alpha\, r$$

из $\Delta OO'Д_1$, $tg\alpha = \frac{2}{OA-AД_1} = \frac{2}{2(\sqrt2-1)r} = \frac{1}{(\sqrt2-1)r}$

$$\frac{h}{(\sqrt2-1)^2r^2} - h - 4r\cdot\frac{1}{(\sqrt2-1)r} = 0 \Leftrightarrow \frac{h}{(3-2\sqrt2)r^2} = h + \frac{4}{\sqrt2-1} \quad (1)$$

Из аналогичных вычислений для конуса с 3r




$\Delta OMM_1 = \Delta OO'M_1$ т.к. $M_1M$ и $M_1O'$ кас. в одну т.

$$tg(180-2\beta) = \frac{h}{3r} \quad tg2\beta = -\frac{h}{3r} = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}$$

$$\Leftrightarrow htg^2\beta - h = 6r\,tg\beta$$

из $\Delta OO'M_1 \Rightarrow tg\beta = \frac{2}{(\sqrt{13}-3)r}$

$$h\cdot\frac{4}{(\sqrt{13}-3)^2r^2} - h - \frac{12r}{(\sqrt{13}-3)r} = 0 \qquad h\left(\frac{4}{(22-6\sqrt{13})r^2} - 1\right) = \frac{12}{\sqrt{13}-3}$$

$$\text{из } (1) \quad h\left(\frac{1}{(3-2\sqrt2)r^2} - 1\right) = \frac{4}{\sqrt2-1} \Rightarrow \frac{\cancel{12}^{3}}{\sqrt{13}-3}\cdot\frac{\cancel{2}(11-3\sqrt{13})\cancel{r^2}}{2-(11-3\sqrt{13})r^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\sqrt2-1}\cdot\frac{(3-2\sqrt2)\cancel{r^2}}{1-(3-2\sqrt2)r^2} \Leftrightarrow 3\overbrace{(11-3\sqrt{13})(\sqrt2-1)}^{11\sqrt2-11-3\sqrt{26}+3\sqrt{13}}(1-(3-2\sqrt2)r^2) =$$

$$= \overbrace{(3-2\sqrt2)(\sqrt{13}-3)}^{3\sqrt{13}-9-2\sqrt{26}+6\sqrt2}(2-(11-3\sqrt{13})r^2) \Leftrightarrow 3(11\sqrt2 - 11 - 3\sqrt{26} + 3\sqrt{13} -$$

$$- r^2(33\sqrt2 - 33 - 9\sqrt{26} + 9\sqrt{13} - 44 + 22\sqrt2 + 12\sqrt{13} - 6\sqrt{26})) = 6\sqrt{13} - 18 - 4\sqrt{26} + 12\sqrt2 -$$

$$- r^2(33\sqrt{13} - 99 - 22\sqrt{26} + 66\sqrt2 - 117 + 27\sqrt{13} + 78\sqrt2 - 18\sqrt{26}) \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt2 + \sqrt{26} - 3\sqrt{13} + 7 = r^2(55\sqrt2 - 77 - 15\sqrt{26} + 21\sqrt{13}) - r^2(80\sqrt{13} - 216 - 40\sqrt{26} +$$

$$+ 144\sqrt2) \quad 2\, r^2(-89\sqrt2 + 139 + 35\sqrt{26} - 39\sqrt{13})$$

прод 6. Чистовик.

$\Leftrightarrow 33\sqrt{2}-33-9\sqrt{26}+9\sqrt{13}-r^2(165\sqrt{2}-231-45\sqrt{26}+63\sqrt{13})=6\sqrt{13}-18-$
$-4\sqrt{26}+12\sqrt{2}-r^2(60\sqrt{13}-216-40\sqrt{26}+144\sqrt{2}) \Leftrightarrow 21\sqrt{2}-15-5\sqrt{26}+3\sqrt{13}=$
$=r^2(21\sqrt{2}-15-5\sqrt{26}+3\sqrt{13}) \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$

Ответ: $r=1$

№5 1) Всего чисел $75\cdot75=5625$ каждому из них нужна пара, причем в паре a и b, если оно не вз. прост и для a выполнены условия и для b

~~$\Rightarrow$ пар минимум $\left[\frac{5625}{2}\right]=2812$ причем~~

мы можем распределить наши числа в $\left\lceil\frac{5625}{2}\right\rceil=2813$ пар, очевидно что какие-то две будут содержать одно и то же число. В каждой паре максимум одно простое число; назовём три числа, входящие в пересек. ~~пар~~ пары тройкой; в ней ~~тоже~~ тоже максимум одно простое т.к. второе (в паре) не вз. просто с ним $\Rightarrow$ у них есть общий делитель не 1 и они различны $\Rightarrow$ еще какой-то делитель есть $\Rightarrow$ уже не простое
$\Rightarrow$ простых максимум сколько ~~на~~ пар ? их 2811 и еще одно из тройки $\Rightarrow$ 2812.

Пример. В каждом столбце будем располагать по 37 простых различных (не 2) числа и их квадраты. (оставляем пустой самую нижнюю клетку)
В последней не запол. строчке расположим 36 простых (не 2) чисел с их квадратами (других) и числа 2, 4, 8
$\Rightarrow$ 2812 прост. чисел $\quad 75\cdot37+36+1=2812$

Ответ: 2812.