ЗУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5862

1

70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАСС)

Город, в котором проводится Олимпиада Нижний Новгород

Дата 24 марта 2017г.

****

Вариант 3

1. Ожерелье состоит из 100 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что среди любых пяти бусинок, идущих подряд, есть хотя бы одна синяя, а среди любых семи, идущих подряд, — хотя бы одна красная. Какое наибольшее количество зелёных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)
2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну из цифр (не старшую). В результате число уменьшилось в 9 раз. Сколько существует чисел, для которых это возможно?
3. Числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию $x_1^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+\ldots+y_n^2 \leqslant 2$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \left(2(x_1 + \ldots + x_n) - y_1 - \ldots - y_n\right) \cdot \left(x_1 + \ldots + x_n + 2(y_1 + \ldots + y_n)\right).$$
4. В треугольник ABC вписана окружность ω радиуса r, которая касается стороны AB в точке X. На окружности отметили точку Y, диаметрально противоположную точке X. Прямая CY пересекает сторону AB в точке Z. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $CA + AZ = 1$.
5. Квадрат 4×4 разбит на 16 квадратов 1×1. Назовем *путем* перемещение по сторонам единичных квадратов, при котором ни одна из сторон не проходится дважды. Какую наибольшую длину может иметь путь, соединяющий две противоположные вершины большого квадрата?
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 32, 48 и 48, а углы при вершине — $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). Над столом подвесили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от центров оснований всех конусов. Найдите радиус шара.

Чистовик (стр 1)

№1 Для начала оценим кол-во ~~зелёных~~ синих и красных бусинок. Синих бусинок $\geq \frac{100}{5} = 20$ (т.к. ~~они идут через~~ среди любых пяти бусинок подряд есть синяя) т.е. 19 не хватит. Ведь 19 бусинок покроют ≤ 95 полей. Красных бусинок $\geq \left[\frac{100}{7}\right] + 1 = 14 + 1 = 15$. Действительно, 14 бусинок смогут покрыть $\leq 14 \cdot 7 = 98$ полей.

Значит зелёных бусинок будет $\leq 100 - 20 - 15 = 65$

Для 65 зелёных бусинок можно придумать пример, который будет удовлетворять условию. Например:

Синие бусинки имеют номера: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 85, 90, 95, 100

Всего их 20 штук, и они покрывают всё поле, т.к. между ними по 4 бусинки. Т.е. что у любых пяти подряд есть синяя.

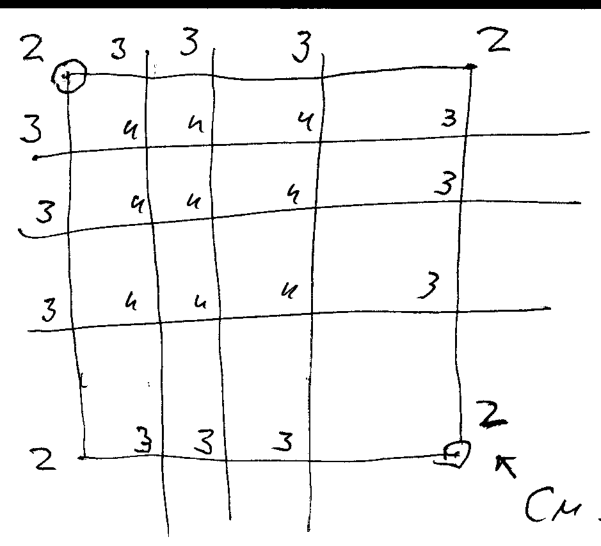
Красные: 7, 14, 21, 28, 34, 41, 48, 54, 61, 68, 74, 81, 88, 94, 1. Всего 15 красных бусинок. Также видно, что ни одна синяя и красная бусинки не совпадают, т.к. ни одно число в красных не $⋮ 5$. Также условие для красных бусинок выполняется, ведь между любыми кр. бусинками находится ≤ 6 других бусинок $\Rightarrow$ среди любых семи подряд есть хотя бы одна красная

Все оставшиеся 65 бусинок будут зелёными. А т.к. зелёных ≤ 65, то это и есть ответ.

Ответ: 65 зелёных бусинок.

стр.2

№5



Всего в таком квадрате будет 25 вершин и 40 единичных рёбер.
Посчитаем в квадрате степени всех вершин (т.е. число исходящих из этой вершины рёбер)
См. на рис.

Если вершина имеет степень 3, то она имеет как минимум либо два исходящих, либо приходящих в неё ребра. Но в таком случае получится, ~~ре~~ что мы пройдём (если использовать все 3 ребра вершины) по одному и тому же ребру дважды, чего нельзя делать. А значит в данной таблице не должно быть вершин со ст. 3.

Также обратим внимание на то, что из начальной и конечной позиции должно ~~быть~~ выходить только одно ребро, ведь посетить её мы потом не сможем ~~из неё выйти~~, т.к. не сможем выйти (пройдём ещё раз по тому же ребру)
=> ~~никогда~~ ~~можно~~ нужно удалить по 1 ребру из ~~конца~~ начальной и конечной вершин.

В таком случае ещё две вершины степени 3 станут ст.=2. Всего останется 10 вершин ст. 3. Причём на 2 из 4 сторон квадрата их будут по прежнему по 3. А на других 2 сторонах по 2. Для того, чтобы ~~удалить пару~~ сделать из пары (3,3) пару (2,2) нужно удалить одно ребро, которое их соединяет (если оно есть). Но т.к. на двух сторонах по 3 вершины со степенью 3 => потребуется удаление двух рёбер, т.к. нужно изменить общую степень на ≥ 3 => И т.к. они никак не связаны друг с другом (верш. со ст. 3) => можно рассматривать эти блоки по отдельности

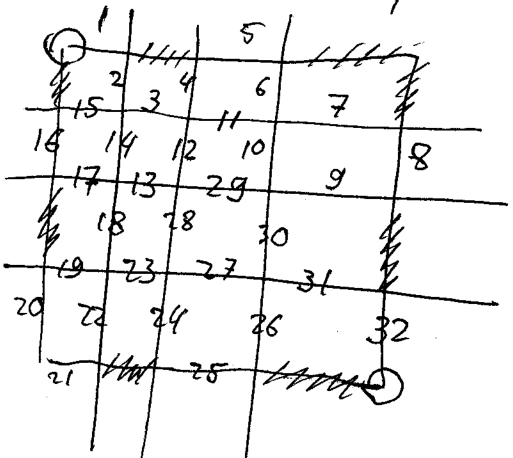
Чистовик (стр-3)

№5 Продолжение

Значит для превращения ~~оставшихся~~ в отсутствие вершин со ст. = 3 необходимо удалить по 1 ребру на сторонах где ~~нет~~ по 2 таких вершины. И по ~~≤~~ ≥ 2 ребра где их по 3. Т.е. удалить $\geq 1+1+2+2 \geq 6$ рёбер

А всего будет $\leq 40 - \underbrace{2}_{\text{у нач и кон}} - 6 = 32$ ребра

Для пути в 32 ребра можно построить пример:



~~////~~ → удалённое ребро. Их 8 штук

На каждом ребре написан порядковый номер обхода

Ни одно ребро не было пройдено дважды

=> Ответ: 32

№2 Пусть k — индекс уд. цифры. Пусть $K > 2$

Пусть число изначально имело вид: $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}$

$$A = X \cdot 10^{n-k+2} + a_k \cdot 10^{n-k+1} + Y$$

всего в числе было $n+1$ цифр

~~также~~

a_k → удалённая цифра

Также ясно, что $Y \leq 10^{n-k+1} - 1$

тогда после удаления a_k оно стало:

$$B = X \cdot 10^{n-k+1} + Y \qquad Y \leq 10^{n-k+1} - 1$$

$$9B = A \Rightarrow 9 \cdot X \cdot 10^{n-k+1} + 9Y = 10 \cdot X \cdot 10^{n-k+1} + a_k \cdot 10^{n-k+1} + Y$$

$$8Y = X \cdot 10^{n-k+1} + a_k \cdot 10^{n-k+1}$$

но т.к. $Y \leq 10^{n-k+1} - 1$, то $8Y \leq 8 \cdot (10^{n-k+1} - 1) < 10^{n-k+1}$

Ильтавик (стр. 4)

№2 Продолжение

$$(x + a_k) 10^{n-k+1} > 10^{n-k}$$

$\Rightarrow$ a

$$\Rightarrow (x + a_k) 10^{n-k+1} > 8Y \quad \text{т.к. } k > 2$$

~~$\Rightarrow$ будет только одно решение, если $10^{n-k+1} = 0$~~

Противоречие.

$\Rightarrow$ ~~$Y = 0$~~ $\Rightarrow k = 2$ значит стёрли 2 цифру (т.к. 1 нельзя)

Если стёрли вторую цифру: Число изначально имело вид:

$$A = a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + X \quad , \text{где } X \leq 10^{n-1} - 1$$

потом:

$$B = a_1 \cdot 10^{n-1} + X \quad ; \quad 9B = A$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-1} = 8X \quad \Rightarrow a_1 + a_2 \text{ от 1 до } 7$$

т.к. $X \leq 10^{n-1} - 1 \Rightarrow a_1 + a_2 < 8$

≤ 7

$a_1 + a_2 = 0 \rightarrow$ не может быть

если ① $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$ тогда $X = \dfrac{10^{n-1}}{8}$

$A = \overline{10\ldots}$ $\qquad B =$

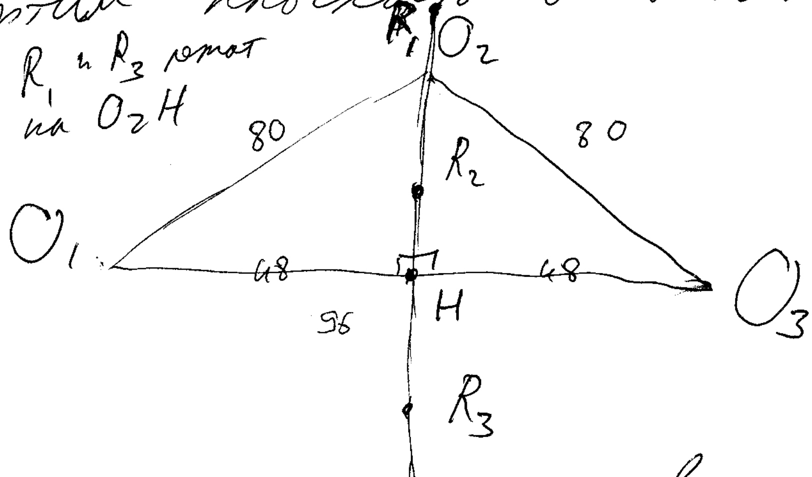
Чистовик (стр. 5)

№6. Пусть O_1; O_2 (→ меньший конус); O_3

→ центры оснований конусов.

А R_1; R_2; R_3 → возможные проекции центра шара на плоскость основания конуса.

Начертим плоскость основания конуса.



$\triangle O_1O_2O_3 \to$ р/б

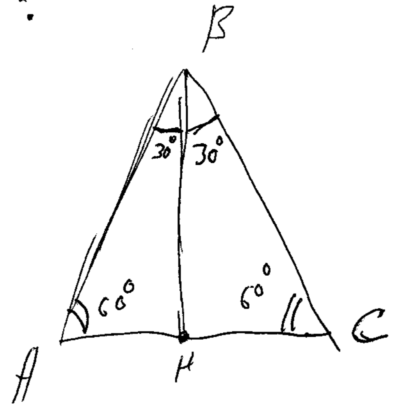
$O_1O_2 = 32+48 = 80$

$O_2O_3 = 32+48 = 80$

$O_1O_3 = 48+48 = 96$

$O_2H \Rightarrow$ мед, бис, выс т.к. $\triangle$ р/б

Теперь рассмотрим осевое сечение меньшего конуса:



$\triangle ABC \to$ р/б

$AC = 32$

$AH = HC = 16 = \frac{32}{2}$

$\angle ABC = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle ABH = \angle HBC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\Rightarrow HB = BC = 2 \cdot 16 = 32$

$\Rightarrow \triangle ABC \to$ ~~р/б~~ р/с

Найдём $O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = \sqrt{6400 - 2304} =$
$= \sqrt{4096} = 64$

по т. синусов $R = \frac{2\,O_1H}{2\sin(2\angle O_1O_2H)} = \frac{O_1H}{\sin(2\angle O_1O_2H)} =$
$= \frac{O_1H}{2\cos O_1O_2H \sin O_1O_2H} = \frac{48}{2 \cdot \frac{48}{80} \cdot \frac{64}{80}} = \frac{80^2 \cdot 48}{2 \cdot 48 \cdot 64} =$
$= \frac{6400}{128} = \frac{100}{2} = 50$

стр. 6

№3 Пусть $n=1$

$x^2+y^2 \le 2 \Rightarrow x^2 \le 2-y^2$

$A=(2x-y)(2y+x)$; $2A \le (2x-y)^2+(2y+x)^2=$

$=5x^2+5y^2$, т. к. $x^2+y^2 \le 2$, то

$2A \le 10 \Rightarrow A \le 5$ тогда $A=5$ при $2x-y=\sqrt{5}$
$2y+x=\sqrt{5}$

$y=\cancel{\sqrt{5}+2x}\ 2x-\sqrt{5}$

$-2\sqrt{5}+4x+x=\sqrt{5} \Rightarrow 5x=3\sqrt{5}$ $x=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$y=\frac{6}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$x^2+y^2=\frac{9}{5}+\frac{1}{5}=2$, что ≤ 2 т. е. такие x и y подходят

и получим $A=5$

Вспомним нер-во о средних: (ср. ар. и ср геом)

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$$ (ср. квадр и ср ариф)

Равенство достигается при $a_1=a_2=\ldots=a_n$

$x=x_1+\ldots x_n$ $y=y_1+\ldots+y_n$

Чистовик. (стр. 7)

№3 Продолжение

$\Rightarrow (a_1 + a_2 + \ldots a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

$\Rightarrow$

Значит $\cancel{\frac{5}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}$

$\frac{5}{2}(x^2+y^2) \le \frac{5}{2} \cdot n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 + y_1^2 + \ldots y_n^2) \le 5n$

Равенство когда:

$\begin{cases} x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a \\ y_1 = y_2 = \ldots = y_n = b \end{cases}$

$2x - y = 2y + x \Rightarrow 2na - nb = 2nb + na \Rightarrow a = 3b$

$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 2$

Тогда: $n \cdot 9b^2 + n \cdot b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{5n} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{5n}}$

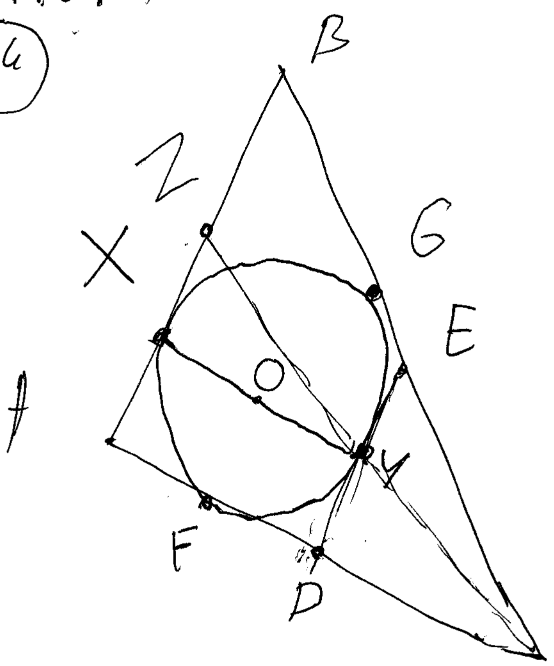
$a = \frac{3}{\sqrt{5n}}$ $\Rightarrow$ max выражения $= 5n$

Тогда

Ответ: $5n$

Чистовик (стр. 8)

№4



$CZ + AZ = 1$

Y → угол проход точка проведён через Y прямую $\parallel$ AB

$\angle CDE = \angle CAB$
$\angle CED = \angle CBA$

Тогда $\triangle AZC \sim \triangle DYC$
$\triangle ZBC$ и $\triangle YEC$ тоже подобны
причём с один. коэф
$EY = EG$; ~~B~~ $DF = DY$; $CF = CG$ т. к. отрезки проведённых из одной точки к окр равны

$$\frac{\cancel{AB + CZ}\ AZ+AC}{BZ + BC} = \frac{k \cdot DY + k \cdot DC}{k \cdot YE + k \cdot EC} = \frac{\cancel{DY + DC}}{YE} \quad \frac{DF + DC}{GE + EC} =$$

$$= \frac{\cancel{DY + DC}}{\cancel{YE + EC}} = \frac{\cancel{CF}}{\cancel{CG}} = 1 \Rightarrow AZ + \cancel{CZ} = BZ + BC = 1 \quad \frac{AC}{} = \frac{CF}{CG}$$

Тогда $S_{ABC} = p \cdot r = \cancel{\ldots} = r$

Т. к. $p = \cancel{BC + BZ + AZ}$

$$p = \frac{BC + BZ + AZ + AC}{2} = 1$$

Ответ: $S = r$

$$* \quad \frac{AZ + AC}{BZ + BC} = \frac{k \cdot DY + k \cdot DC}{k \cdot YE + k \cdot EC} = \frac{DF + DC}{GE + EC} =$$

$$= \frac{CF}{CG} = 1 \Rightarrow AZ + AC = BZ + BC = 1$$