7) $SO_1 = \frac{r}{2} + R_1 = \frac{r}{2} + 1$

8) (рис в) Аналогично

$\angle O_4QS = \frac{\lambda_3 + 180}{4} = \frac{4\operatorname{arcctg}\frac{2}{3} + 180}{4} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{3} + 45$

9) $SO_3 = SQ + QO_3$

$SQ = \frac{r}{tg\angle O_4QS} = \frac{r}{tg(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3} + 45)} = \frac{r(1 - tg(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3})\, tg 45)}{tg \operatorname{arcctg}\frac{2}{3} + tg 45} = \frac{r(1-\frac{2}{3})}{\frac{2}{3}+1}$

$= \frac{\frac{1}{3}r}{\frac{5}{3}} = \frac{r\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{r}{5}$

$SO_3 = \frac{r}{5} + R_3 = \frac{r}{5} + 12$

10) (рис а) из $\triangle O_1O_3H$ по теор. Пиф:

$O_1H = \sqrt{(R_1+R_3)^2 - R_3^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$

11) Из $\triangle O_3SH$ по теор. Пиф:

$SH = \sqrt{(\frac{r}{5}+12)^2 - R_3^2} = \sqrt{\frac{r^2}{25} + \frac{24r}{5} + 144 - 144} = \frac{\sqrt{r^2+120r}}{5}$

12) $O_1H = O_1S + SH$

$5 = \frac{r}{2} + 1 + \frac{\sqrt{r^2+120r}}{5}$

$\frac{\sqrt{r^2+120r}}{5} = 4 - \frac{r}{2} \quad |\cdot 5$

$\sqrt{r^2+120r} = 20 - \frac{5r}{2}$

$r^2 + 120r = 400 - 100r + \frac{25r^2}{4}$

$\begin{cases} 20 - \frac{5r}{2} \geq 0 \\ \frac{4r^2 - 25r^2}{4} + 220r - 400 = 0 \\ \frac{5r}{2} \leq 20 \quad |\cdot 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{21r^2}{4} + 220r - 400 = 0 \quad |\cdot -\frac{1}{4} \\ 5r \leq 40 \end{cases}$

$\begin{cases} 21r^2 - 880r + 1600 = 0 \; (1) \\ r \leq 8 \; (2) \end{cases}$

$\begin{array}{r} 880 \\ \times\, 880 \\ \hline 704 \\ 704 \\ 774400 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1600 \\ \times\, 84 \\ \hline 64 \\ 128 \\ 134400 \end{array}$ $\begin{array}{r} 774400 \\ -\,134400 \\ \hline 640000 \end{array}$

(1): $D = 774400 - 4\cdot 21 \cdot 1600 = 774400 - 134400 = 640000$

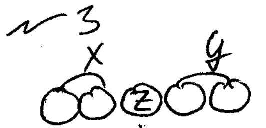
$\sqrt{D} = 800$

$r_1 = \frac{880-800}{42} = \frac{80}{42} = \frac{40}{21}$

$r_2 = \frac{880+800}{42} = \frac{1680}{42} = \frac{840}{21} = 40$ – не удв (2)

Ответ: $\frac{40}{21}$

№3



n-ое место

$x\cdot 10^n + z\cdot 10^{n-1} + y$ – исходное число

$x\cdot 10^n + y$ – полученное число

$x\cdot 10^n + z\cdot 10^{n-1} + y = 6(x\cdot 10^n + y)$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1077 1 75

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 12.03.2017

****

Вариант 2

1. Ожерелье состоит из 175 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что у каждой красной бусинки разноцветные соседи, а на любом участке ожерелья между двумя зелёными бусинками есть хотя бы одна синяя. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)

2. У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.

3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n$ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \left(\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}\right) \cdot \left(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}\right).$$

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$.

5. В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее количество коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно четырех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)

6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 1, 12 и 12, а углы при вершине — $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ и $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.

№1

Так как у каждой красной бусины разноцветные соседи, то подряд могут идти не более 2-х красных бусин. Пары красных бусин мы можем разделять неограниченным кол-ом синих бусин, но, чтобы использовать наименьшее кол-во синих, пары красных бусин нужно чередовать то 1 синей, то 1 зелёной бусиной (чтобы соблюдать также условие соседства зелёных бусин). Таким образом наше ожерелье будет состоять из повторяющихся фрагментов по 6 бусин. (син.+кр.+кр.+зел+кр+кр...). Данный фрагмент является самым длинным, ~~[illegible]~~ из возможных фрагментов, содержащих всего 1 синюю бусину (после него опять может идти только синяя бусина). Однако, 175 делится на 6 с остатком $(29\cdot 6+1)$, что говорит о том, что помимо 29 одинаковых фрагментов, в ожерелье с наименьшим кол-вом син. б. нужно добавить ещё 1 бус. Чтобы не нарушать условие соседства, это может быть только синяя бусина. Тогда ожерелье с минимальным кол-вом синих бусин будет выглядеть так:

$$\ldots n_{29}+\text{син}+\underbrace{\text{син}+\text{кр}+\text{кр}+\text{зел}+\text{кр}+\text{кр}}_{n_1}+n_2+n_3\ldots$$

и будет содержать $29+1=30$ синих бусин.

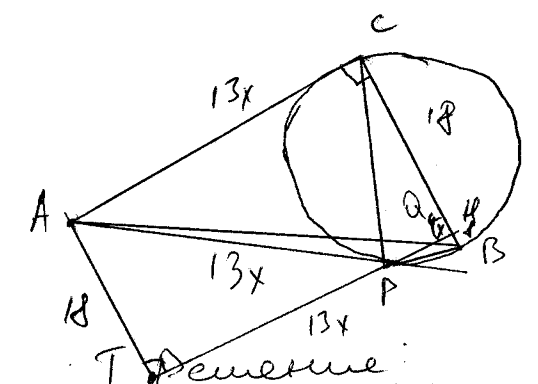
Ответ: 30

$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 8 \\ \hline 144 \end{array}$$

№4

Дано: ABC-прямоуг;
$\angle C = 90^\circ$
Окр; BC-диам
$BC=26$
AP-кас. к окр
$PH \perp CB$
$PH \cap AB = Q$
$\frac{BH}{CH} = \frac{4}{9}$

Найти: S_{BPQ}



Решение

1) $BC=26$; $\frac{BH}{CH}=\frac{4}{9}$, то $BH=8$, $CH=18$

2) Из $\triangle PCB$ (прямоуг., опирается на диам.)
$PH=\sqrt{8\cdot 18}=\sqrt{144}=12$

3) $\measuredangle\ \triangle ABC$ и $\triangle QHB$
а) $\angle ABC$ - общий
б) $\angle ACB = \angle QHB = 90^\circ$
} $\triangle ABC \sim \triangle QHB$
$\frac{HB}{CB}=\frac{QH}{AC}=\frac{8}{26}=\frac{4}{13}$

4) Пусть $QH=4x$, тогда $AC=13x$ (из подобия)

5) Построим $AT \parallel CB$; $AT\cap PH = T$

6) $\measuredangle ACHT$
а) $AT \parallel CB$
б) $AC \parallel TH$ (перпендикулярны к CB)
, то ACHT - пар-мм ~~[illegible]~~, $\angle ACB = 90^\circ$, то ACHT прямоуг.
$\Rightarrow CH = AT = 18$; $AC=TH=13x$

7) $AP=AC=13x$ (отрезки касательных)

8) Из $\triangle ATP$ по теор. Пиф.:
$TP=\sqrt{AP^2-AT^2}=\sqrt{13^2x^2-18^2}=\sqrt{169x^2-324}$

9) $TH = TP+PH$
$13x=\sqrt{169x^2-324}+12$
$13x-12=\sqrt{169x^2-324}\ \Big|^2$
$\cancel{169x^2}-312x+144=\cancel{169x^2}-324$
$-312x=-468$
$x=\frac{468}{312}=\frac{39}{13}=\frac{3}{2}$

10) $QH=4x=\frac{4\cdot 3}{2}=6$

11) $PQ=PH-QH=12-6=6$

12) $S_{BPQ}=\frac{1}{2}PQ\cdot HB=\frac{36\cdot 8}{2}=24$

Ответ: 24

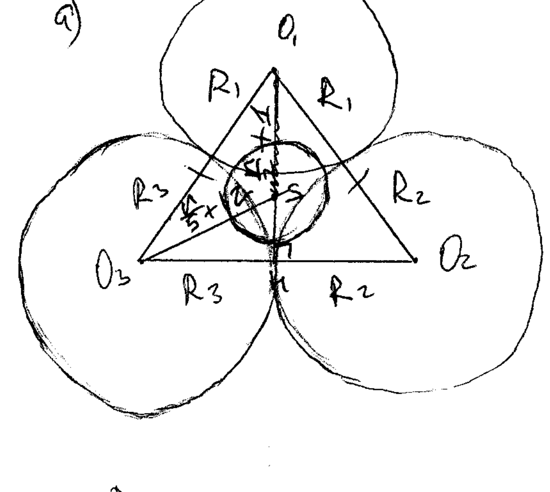
$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 13 \\ 12 \\ \hline 26 \\ 13 \\ \hline 156 \end{array}$$

№6

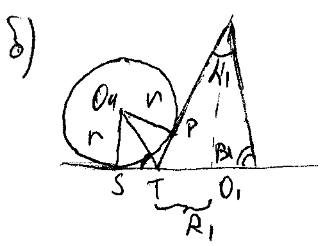
Дано:
3 конуса, касающ. друг друга
R_1, R_2, R_3 - радиусы осн. конусов
$R_1 = 1$
$R_2 = R_3 = 12$
$\angle_1, \angle_2, \angle_3$ - углы между образ. кон.
$\angle_1 = 4\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$
$\angle_2 = \angle_3 = 4\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}$
Шар, касающийся всех конусов.

Найти: радиус шара

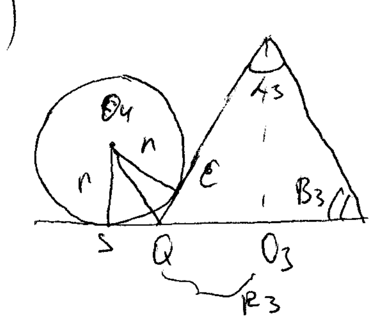
а)



б)



в)



Решение:

1) Обозначим:
а) K_1, K_2, K_3 - конусы
б) O_4 - центр шара, S-проекция O_4 на пл. стола
в) O_1, O_2, O_3 - центры оснований конусов
г) n - радиус шара
д) B_1, B_2, B_3 - углы между образ. и осн. конусов.

(рис а.) 2) $\measuredangle \triangle O_1O_2O_3$
а) $O_1O_2 = R_1+R_2$
б) $O_1O_3 = R_1+R_3$
в) $R_2=R_3$
} $O_1O_2 = O_1O_3 \Rightarrow \triangle O_1O_2O_3$ равноб, где проведём O_1H - мед. и выс. H - точка касания K_2 и K_3

3) (рис. б.) O_4T - биссектр. $\angle STP$ (равноудалена от сторон)

4) $\angle B_1 = \frac{180-\angle_1}{2}$

5) $\angle STP$ (внешний) $= \angle_1 + \angle B_1 = \angle_1 + \frac{180-\angle_1}{2} = \frac{2\angle_1+180-\angle_1}{2} = \frac{\angle_1+180}{2}$; $\angle O_4TS = \frac{1}{2}\angle STP = \frac{\angle_1+180}{4} = \frac{4\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+180}{4} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+45$

6) $SO_1 = ST+TO_1$
$ST = \frac{n}{\operatorname{tg}\angle O_4TS} = \frac{n}{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+45)} = \frac{n(1-\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3})\operatorname{tg}45)}{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{1}{3})+\operatorname{tg}45} = \frac{n(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{2}{3}n}{\frac{4}{3}} = \frac{2n\cdot 3}{3\cdot 4} = \frac{n}{2}$

$x\cdot10^n + z\cdot10^{n-1} + y = 6x\cdot10^n + 6y$ . . Чистовик

~~xxxx~~

$5y = z\cdot10^{n-1} - 5x\cdot10^n$

$5y = 10^{n-1}(z-50x)$

$\underset{0}{\vee}\quad \underset{0}{\vee}\quad \underbrace{\quad\quad}_{0}$

Так как z - цифра, чтобы $z-50x>0$, $x=0$

$5y = 10^{n-1}\cdot z$

$5y = 5^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot z \;|:5$

$y = 5^{n-2}\cdot 2^{n-1}\cdot z$

Так как исходное число не оканчивается на 0; y не оканчивается на 0, то оно не делится на 10, y не делится на 10.

тогда $5^{n-2}=1$; $n=2 \Rightarrow$ ~~число двухзначное~~, y цифра

$y = 2z$

при $z=1$
$y=2$
Иск. число: 12

при $z=2$
$y=4$
Искомое число: 24

при $z=3$
$y=6$
Иск. ч: 36

при $z=4$
$y=8$
Иск. ч: 48

при $z>4$
y - не цифра

Ответ: 12, 24, 36, 48