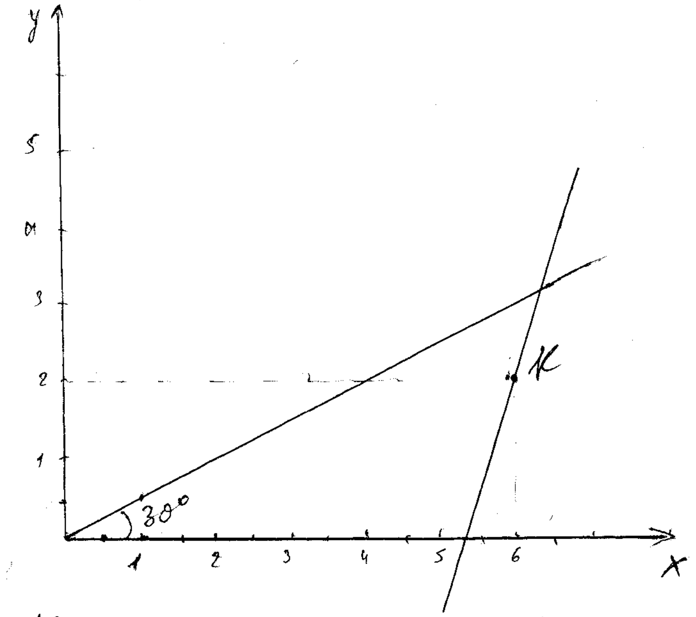
№4.

$f(x) = \frac{1}{2}x$?

$K(6;2)$?



Через т. K проход. прямая $y = ax + b$

$2 = 6a + b \Rightarrow b = 2 - 6a \Rightarrow$

$y = x \cdot a + 2 - 6a$

Найдём точку пересеч. ~~прям~~ с прямой $y = 0$

$x_0 \cdot a + 2 - 6a = 0 \Rightarrow$

$x_0 = \frac{6a-2}{a}$

Найдём пересеч. с $f(x)$ $= \frac{1}{2}x$

$y_0 = 2y_0 \cdot a + 2 - 6a$

$y_0(1-2a) = 2 - 6a \Rightarrow y_0 = \frac{2-6a}{1-2a} = h$

$m \cdot \frac{h}{2} = S = \left(\frac{2-6a}{1-2a}\right)\left(\frac{6a-2}{a}\right) \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{-(6a-2)^2}{2a \cdot (1-2a)}$

$\left(\frac{-(6a-2)^2}{a(1-2a)}\right)' = \frac{2(a-1)(3a-1)}{(1-2a)^2 a^2} = 0$

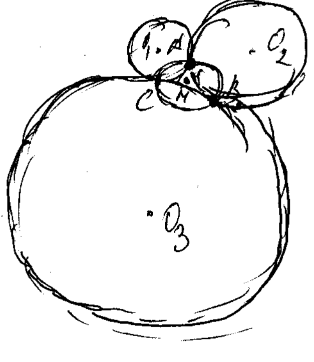
Решение при $a = 1$; тогда $S = 8$ — min площадь.

Ответ: 8.

№6.

Изобразим проекции конусов на стол:

точки соприкосн. образ. Δ-к ABC кот. описана окр. с центром в т. M.



на стол ⇒

M — проекция центра шара на стол ⇒ $AM = BM = CM$, т.к. центр шара равноуд. от точек касания.

$O_2A = O_2C$ $O_3B = O_3A$ $O_1B = O_1C$

Т.к. отрезок O_2M лежит на биссектр. углов $\angle O_1O_3O_2, \angle O_2O_1O_3, \angle O_3O_2O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ — центр. впис. окр. треуг-ка $O_1O_2O_3$.

Запишем радиус этой окр.: $r = \sqrt{\frac{2r \cdot 3r \cdot 10r}{15r}} = 2r$ (т.к. r =

$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, где p — полуперим., a, b, c — длины сторон,

$\triangle O_1O_2O_3$ — прямоугольный ⇒

1

779 60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ

2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 04.03.17

****

Вариант 10

1. За круглым столом сидят 50 школьников: блондины, брюнеты и рыжие. Известно, что в любой группе сидящих подряд школьников между двумя блондинами есть хотя бы один брюнет, а в любой группе между двумя брюнетами — хотя бы один рыжий. Какое наименьшее количество рыжих может сидеть за этим столом?

2. У 200-значного натурального числа стерли старшую цифру и цифру, стоящую через одну от нее. В результате число уменьшилось в 44 раза. Найдите все числа, для которых это возможно.

3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}.$$

4. Внутри угла раствора 30° с вершиной A выбрана точка K, расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку K проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальную площадь треугольника, отсекаемого прямой от угла.

5. В клетках таблицы 75 × 75 расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них имеет не более трех различных простых делителей. Известно, что для любого числа a из таблицы в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число b, что a и b не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?

6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол положили шар радиуса 2, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите r.

№1

Обозначим кол-во блондинов за N. Рассмотрим как они расположены. Блонд. дел. окр. на N дуг и на кажд. такой дуге должен быть расположен min 1 брюнет => кол-во брюнетов $\geq$ кол-ву блондинов.

Ан-но, кол-во рыжих $\geq$ кол-ва брюнетов.

Значит, кол-во рыжих ≥ 17. Иначе общее число школьников не превыш. бы $16 \cdot 3 \; (=48)$, а по усл. их 50.

Приведём пример, где рыжих ровно 17:

блондины на местах под номерами: 1, 4, 7, 10 ... 46

брюнеты: 2, 5, 8, 11 ... 47, 49

рыжие: 3, 6, 9, 12 .... 48, 50 , что и требовалось док-ть.

Ответ: 17 рыжих минимум.

№2

$$\cancel{A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}}$$

Представим число в виде: $b_1^{199} + b_2^{198} + b_3^{197} + k$,

Здесь $0 \leq b_1, b_2, b_3 \leq 9$, также $0 \leq k < 10^{197}$.

После стирания цифры останется $b_2^{197} + k$

Из условия мы знаем $b_1^{199} + b_2^{198} + b_3^{197} + \cancel{k} = 44\,(b_2^{197} + k)$

$100 b_1^{197} + 10 b_2^{197} + b_3^{197} + k - 44\,(b_2^{197} - 44k) = 0$

$10^{197}(100 b_1 - 34 b_2 + b_3) = 43k$

Левая часть равенства делится на 10^{197}, но мы знаем, что $k < 10^{197}$ и число 43 взаимно просто с 10 => правая часть дел. на 10^{197} тогда и только тогда, когда $k = 0$. В этом случае $100 b_1 - 34 b_2 + b_3 = 0$

Подберём подходящ. цифры для b_i: 1) $b_1 = 1$, $\cancel{100} = 3 \cdot 34 - 2$ => $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 2$.

2) $b_1 = 2$ $\quad 200 = 6 \cdot 34 - 4$ => $b_1 = 2$, $b_2 = 6$, $b_3 = 4$

3) $b_1 = 3$ $\quad 300 = 9 \cdot 34 - 6$ => $b_1 = 3$, $b_2 = 9$, $b_3 = 6$ $\quad |-34 b_2 + b_3| \leq 306$

b_1 не может быть > 3, т.к. $|-34 b_2 + b_3| \leq 306$

Получаем, что подходят числа $132 \cdot 10^{197}$, $264 \cdot 10^{197}$, $396 \cdot 10^{197}$.

Ответ: $132 \cdot 10^{197}$, $264 \cdot 10^{197}$, $396 \cdot 10^{197}$.

№3

$$A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}$$

Запишем цепочку неравенств: $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$

Оценим числитель сверху, а знаменатель снизу:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}} \geq n \sqrt[4n]{\frac{1}{x_1} \ldots \frac{1}{x_n}}$$

$$\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n} \leq \sqrt{n\sqrt{1-x_1} + \ldots + \sqrt{1-x_n}} \leq \sqrt[4]{n^3} \cdot \sqrt[4]{(1-x_1) + \ldots + (1-x_n)}$$

Получаем $A \leq \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{1-x_1 + \ldots + 1-x_n}} \cdot \sqrt[4n]{x_1 \ldots x_n} =$

$$= \sqrt[4]{\frac{1-x_1 + \ldots + 1-x_n}{n}} \cdot \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Пусть $B = A^4$, тогда $B = \frac{1-x_1 + \ldots + 1-x_n}{n} \cdot \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$

$$B \leq \frac{1-x_1 + \ldots + 1-x_n}{n} \cdot \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left((x_1 + \ldots + x_n) - \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{n} \right).$$

Рассмотрим часть выражения $(x_1 + \ldots + x_n) - \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{n} =$

$$= (x_1 + \ldots + x_n) - n\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leq (x_1 + \ldots + x_n) - n\left(\sqrt{\frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{n}}\right)^2 = (x_1 + \ldots + x_n) - (x_1 + \ldots + x_n)^2 =$$

$$= x_1(1-x_1) + \ldots + x_n(1-x_1).$$

Рассмотрим $f(x) = x(1-x)$; $f'(x) = 1 - 2x$ => $x = \frac{1}{2}$ — точка экстремума

Т.к. $f(0) = f(1) = 0$, а $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, то при всех $x_i = \frac{1}{2}$ (max от B) =

$$= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4n}} \Rightarrow \max A = \sqrt[8]{\frac{1}{4n}}.$$

№6

$\Rightarrow (3+2)^2 \cdot r^2 + (2+10)^2 \cdot r^2 = (3+10)^2 \cdot r^2$?

Получаем, что радиус шара $= 2r$ (т.к. это проекция).

$2r = 2 \Rightarrow r = 1$.

Ответ: $r = 1$.

№5.

В таблице расположены числа 3-х видов: 1) p_i – простые
2) $p_i \cdot p_z$ – 2 простых множителя

($p_k \in \mathbb{N}$)

3) $p_i \cdot p_z \cdot p_k$ – 3 простых множ.

2 простых числа всегда будут взаимно просты $\Rightarrow$ в табл. обязат. должны быть числа вида 2 или 3

Заметим, что любое число 2-ого вида $= p_i \cdot p_z$ может быть не взаимно просто не $>$ чем с 2-мя простыми числами, а именно p_i ~~и~~ p_z

Любые наборы чисел 1 и 2-ого вида, условно, обл. объединёнными тройками чисел (p_i, p_z и $p_i \cdot p_z$). Причём наиб. кол-во простых чисел в таком наборе мы получаем, когда такие тройки чисел не пересекаются, т.е. все числа в тройках разные. Это мы можем увидеть из следующих утверждений:

1) если тройки пересекаются по числу $p_i \cdot p_z$, а именно ($p_i^1, p_z^1, p_i \cdot p_z^1$) и ($p_i^2, p_z^2, p_i \cdot p_z^2$) таковы, что числа в $p_i \cdot p_z^1 = p_i \cdot p_z^2$. Тогда такие тройки совпадают.

Если тройки пересек. в простом числе, тогда объединения 2-х троек это будет 5 различных чисел, кот. можно записать след. образом: ($p_i, p_i \cdot p_z, p_z, p_z \cdot p_k, p_k$). 5 чисел из кот. только 3 – простые.

Когда 3-ки различны, тогда на 6 чисел приходится 4 простых, мы получаем больше простых чисел, чем если 3-ки пересекаются:

$\frac{4}{6} > \frac{3}{5}$

Ан-но, любое число 3-его вида, равное $p_i p_z p_k$ может быть невзаимно просто не $>$ чем с 3-мя прост. (p_i, p_z, p_k)

Ан-но доказывается, что наиб. кол-во простых чисел мы получим, если 4-ки чисел не будут пересекаться.

Разбивая все числа на 4 предпочтительно, т.к. на 4 числа 3 простых – это выгоднее, чем 2 прост. числа из 3-х, т.к. $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

Разобьём таблицу 75×75 на как можно большее число четвёрок. В каждой 3-ей таблице будет располож. непересекающиеся 4-ки чисел друг за другом.

Т.к. 75 не дел. на 4, но 72 дел. на 4, то заполнится таблица 75×72, где будет $\frac{3}{4} \cdot 72 \cdot 75$ простых чисел $\left(\frac{3 \cdot \cancel{36}^{18} \cdot 75}{\cancel{2}}\right) = \left(3 \cdot 18 \cdot 75\right)$

Остаётся 3 колонки (3×75). В них также будем укл. 4-ки, но сверху вниз.

Таким образом заполн-ся 3 столбца по 72 клетки $\frac{18}{4}$

Остс. незап. 3×3. Его можно зап либо 2-мя четв. и 1 числ., либо 3-мя 3-ками. В обоих случ. число прост. чисел. = 6.

В итоге $\frac{3}{4} \cdot 72 \cdot 75 + \frac{3}{4} \cdot 72 \cdot 3 + 6 = 4218$ простых чисел

Ответ: 4218 простых чисел