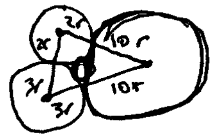
№6.

Меньшее основание касается оснований 3х конусов, потому, что усеченный конус имеет с каждым общую образующую:



Для того, чтобы найти r, воспользуемся формулой Декарта:

$$(k_1+k_2+k_3+k_4)^2 = 2(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2), \text{ где } k_n = -\frac{1}{r_n}$$

$$\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{3r}+\frac{1}{10r}+\frac{1}{15}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{4r^2}+\frac{1}{9r^2}+\frac{1}{100r^2}+\frac{1}{225}\right)$$

$$\frac{(28+2r)^2}{900r^2} = 2\left(\frac{334+4r^2}{900r^2}\right)$$

$$(28+2r)^2 = 2(334+4r^2)$$

$$28^2+4r\cdot 28+\cancel{4r^2} = \cancel{2}\cdot 4r^2+2\cdot 334$$

$$4r^2-28\cdot 4r-116=0$$

$$r^2-28r-29=0$$

$$\left[\begin{array}{l} r=-1 \\ r=29 \end{array}\right. \Rightarrow \text{т.к. } k_n=-\frac{1}{r_n} \Rightarrow r=1.$$

Ответ: r = 1

3910 УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2016–2017

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА **(10-11 КЛАСС)**

Город, в котором проводится Олимпиада Нижний Новгород

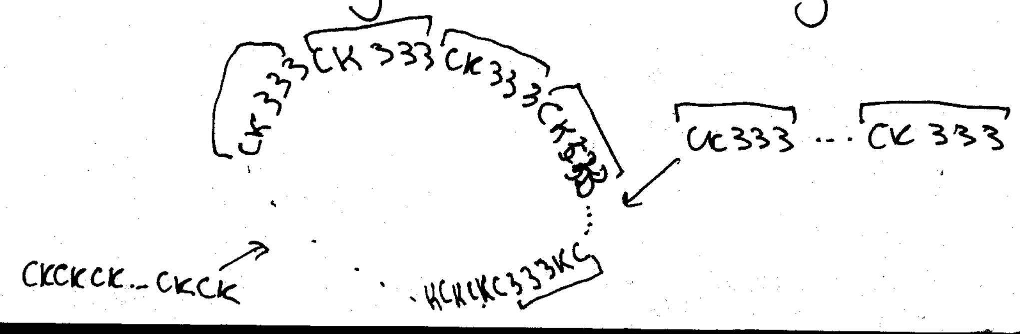
Дата 24.03.17

****

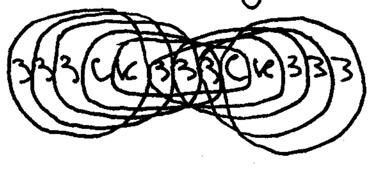
Вариант 8

1. На нитке надеты 75 синих, 75 красных и 75 зеленых бусинок. Назовем пятерку подряд идущих бусинок *хорошей*, если среди них ровно 3 зеленых бусинки и по одной красной и синей. Какое наибольшее количество хороших пятерок может быть на этой нитке?
2. У 200-значного натурального числа одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 5 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.
3. Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \frac{\cos^2 x_1 + \ldots + \cos^2 x_n}{\sqrt{n} + \sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1 + \ldots + \operatorname{ctg}^4 x_n}}.$$
4. На основание BC равнобедренного треугольника ABC опущена высота AH. На стороне AB отмечена такая точка P, что $CP = BC$. Отрезок CP пересекает высоту AH в точке Q. Оказалось, что площадь треугольника BHQ в 4 раза меньше площади треугольника APQ. Найдите углы треугольника ABC.
5. Из n^2 лампочек собрали табло $n \times n$. Каждая лампочка имеет два состояния — включенное и выключенное. При нажатии на произвольную лампочку ее состояние сохраняется, а все лампочки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, меняют свое состояние на противоположное. Изначально все лампочки на табло выключены. Вася последовательно нажал на несколько лампочек, из которых никакие две не лежат в одной строке или в одном столбце. Какое наибольшее количество лампочек мог зажечь Вася?
6. На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите r, если радиус меньшего основания усеченного конуса равен 15.

№1. Заметим, что последовательность, показанная ниже подходит:



Каждая $\dots\underbrace{333}\dots$ дает 5 хороших пятерок:



Однако заметим, что $\dots\underbrace{333}\dots$ дает 7 хороших пятерок, но продолжив порезет понимаем, что 2 из них мы уже посчитали, поэтому 5.

Так же по краям крайних хороших пятерок уже не будет хватать $\dots\underbrace{333}\dots$, поэтому необходимо вычесть 2 лишних хороших пятерок:

$n \le \frac{75}{3}\cdot 5 - 2 = 123$, где n - кол-во хороших пятерок

Пример такой последовательности присутствует выше.

Ответ: 123.

№2.

$\overline{a_1 a_2 \dots a_{200}}$ - исходное число

Перепишем его поразрядно:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{a_1 \dots a_j 0000\dots0} = A\cdot 10^n\\&\overline{a_n 0000\dots 0} = a_n\cdot 10^{n-1}\\&\overline{a_{j+2}a_{j+3}\dots a_{200}} = B\end{aligned}\right| \Rightarrow \overline{a_1 a_2 \dots a_{200}} = A\cdot 10^n + a_n\cdot 10^{n-1} + B$$

После преобразований получаем равенство:

$$A\cdot 10^n + a_n\cdot 10^{n-1} + B = 5(A\cdot 10^n + B)$$

$$a_n\cdot 10^{n-1} = 4(A\cdot 10^n + B)$$

$$4B = 10^{n-1}\cdot(a_n - 40A)$$

Т.к. $B > 0 \Rightarrow A = 0$, отсюда получим, что:

$$4B = a_n\cdot 10^{n-1}$$

Т.к. $B < 10^{n-1}$, то необходимо дополнить степень 10 с левой стороны равенства. $10^n = 5^n\cdot 2^n \Rightarrow \left[\begin{aligned}&B = 5\cdot 10^{n-2}\\&B = 25\cdot 10^{n-3}\\&B = 75\cdot 10^{n-3}\end{aligned}\right.$

Степень 5 не более 2, потому как степень 2 = 2.

Теперь получим совокупность

$$\left[\begin{aligned}&20\cdot 10^{n-2} = a_n\cdot 10^{n-1}\\&100\cdot 10^{n-3} = a_n\cdot 10^{n-1}\\&300\cdot 10^{n-3} = a_n\cdot 10^{n-1}\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned}&a_n = 2\\&a_n = 1\\&a_n = 3\end{aligned}\right| \Rightarrow$$

Получаем числа:

25000...0

125000...0

375000...0

Ответ: 25000...0, 125000...0, 375000...0.

N3.

$$A = \frac{\cos^2 x_1 + \dots + \cos^2 x_n}{\sqrt{n} + \sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1 + \dots + \operatorname{ctg}^4 x_n}}$$

Перепишем A в более удобном виде:

$$A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i}{\sqrt{n} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^4 x_i}}$$

Оценим i-й $\operatorname{ctg} x$:

неравенство о средних

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 x_i}{n} \le \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^4 x_i}{n}}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\operatorname{ctg}^2 x_i \le \sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^2 x_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^4 x_i} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i}{\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^2 x_i} \ge \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i}{\sqrt{n} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^4 x_i}} = A$$

Оценим i-й $\operatorname{ctg}^2 x$:

$$\operatorname{ctg}^2 x_i + 1 = \frac{1}{\sin^2 x_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^2 x_i + n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_i} \;\Big|\cdot\frac{\sqrt{n}}{n}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^2 x_i + \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_i} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i}{\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}^2 x_i} = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i}{\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_i}}$$

Оценим i-й $\cos^2 x$:

$$\sin^2 2x \le 1$$

$$4\cos^2 x\sin^2 x \le 1$$

$$4\cos^2 x \le \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Downarrow$$

$$4\sum_{i=1}^{n}\cos^2 x_i \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i}{\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_i}} \le \frac{\frac{n}{4}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_i}}{\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2 x_i}} = \frac{\sqrt{n}}{4}$$

Получаем, что $A \le \frac{\sqrt{n}}{4}$, а максимальное значение A достигается при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\pi}{4}$

Ответ: $A_{\text{максимальное}} = \frac{\sqrt{n}}{4}$.