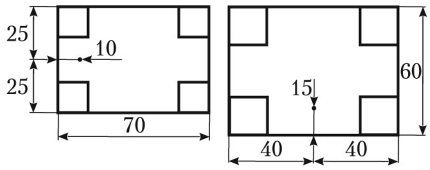
Материалы отборочного тура олимпиады школьников по математике за 2010/2011 учебный год и 2011/2012 учебный год

1. Даны два различных квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. Найти все x, для которых $f(x) = g(x)$.
2. Из прямоугольного листа жести вырезают четыре одинаковых квадрата, прилегающих к углам, и из оставшейся части изготавливают ванночку в форме прямоугольного параллелипипеда. Имеются два листа жести, оба с дыркой, которая на рисунке обозначена точкой. Из какого листа можно изготовить ванночку большей вместимости?



3. Найти все такие значения параметров a и b, что точки пересечения параболы $y = x^2 - 1$ с осью Ox и точка (a, b) образуют тупоугольный треугольник.
4. Автомобиль спускается с горы со скоростью 72 км/ч. По ровной дороге он едет со скоростью 63 км/ч, а взбирается на гору со скоростью 56 км/ч. Из города A в город B автомобиль доезжает за 4 часа, а обратный путь занимает 4 часа 40 минут. Найти расстояние между двумя городами.
5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Площадь треугольника AEB равна 6, площадь треугольника DEC равна 24, а площади треугольников AED и BEC равны. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

Материалы заключительного тура олимпиады школьников по математике за 2010/2011 учебный год и 2011/2012 учебный год

1. По ипотеке клиент должен вносить по 43 тыс. рублей в месяц в течение 10 лет. Договор предусматривает ежемесячные штрафы: если общая сумма, внесенная клиентом с учетом платежа в текущем месяце, больше условленной — 3% от суммы переплаты, если меньше — 7% от задолженности. Найти минимальную сумму, которую клиент уплатит банку в виде штрафов за первые 4 года, если все его платежи кратны 25 тыс. рублей.
2. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Доказать, что это уравнение имеет корень на промежутке $[0; 1]$.
3. Найти количество корней уравнения $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right]$. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x).
4. В треугольнике с целочисленными сторонами одна из медиан равна 16, другая равна 29. Найти стороны треугольника.
5. В квадрате 90×90 на диагонали, выходящей из левого нижнего угла, отмечено 10 клеток, причем обе угловые клетки не отмечены. В квадрате расставлены целые числа: вдоль верхней и вдоль левой стороны — единицы, на отмеченных клетках диагонали — нули, а в каждой из остальных клеток стоит число, равное сумме числа, стоящего сверху, и числа, стоящего слева. Доказать, что число, стоящее в правом нижнем углу, не делится на 89.
6. Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x) = \dfrac{x^2 + ax - 5}{x^2 - x + 4}$.

7. Минута телефонного разговора стоит 2,99 рублей. Разговор возможен, пока текущий остаток на счете больше этой суммы. Платежи, вносимые абонентом, должны быть кратны 100 рублям, и с них удерживается комиссия 8%. Какова минимальная сумма, позволяющая абоненту звонить? Через какое наименьшее время разговора такая сумма может оказаться на счете?
8. Найти площадь фигуры, описываемой в координатах Oxy неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 3[x]$.
9. Найти все простые числа p и q, для которых $p^2q + 499q$ — точный квадрат, а $pq - 499p$ — точный куб.
10. Внутри треугольника ABC ($AB < BC$) лежит точка O, равноудаленная от трех его вершин. BD — биссектриса угла B. Точка M — середина стороны AC, а точка P на луче MO такова, что $\angle APC = \angle ABC$. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из P на BC. Доказать, что каждая из диагоналей четырехугольника $BDMN$ делит треугольник ABC на две равновеликие части.
11. Сколькими способами можно на клетчатой доске размером 10×10 расставить 18 шахматных слонов, не бьющих друг друга? Напомним, что шахматный слон бьет по диагонали любое число клеток.
12. Агроном-любитель Петя вырастил три сферических помидора, диаметры которых равны 2 см, 4 см и 6 см. Урожай он решил сохранить для истории в сосуде цилиндрической формы. У Пети имеется 100 см^3 консервирующего раствора. Сможет ли Петя подобрать сосуд так, чтобы залитый раствор полностью закрыл помидоры?