

РАЗДЕЛ ЭКОНОМИКА

Задача № 1

Предположим, что общество некой страны состоит из трех, одинаковых по количеству людей, социальных групп – бедные, средний класс и богатые люди. В условиях международной напряженности в стране решается вопрос об укреплении обороны страны. Как известно, оборона страны – это общественное благо, которое потребляется всеми членами общества в абсолютно одинаковом количестве, так как такое благо едино и неделимо (в отличие от блага рыночного типа). Экономисты страны, изучили предпочтения каждой из указанных социальных групп относительно их потребностей в услугах по обороне страны и выяснили, что функция спроса на оборону у бедных слоев населения выражается уравнением: $Q_{\text{БЕД.}} = 30 - P$; функция спроса на оборону у средних слоев населения: $Q_{\text{СРЕД.}} = 70 - P$; функция спроса на оборону у богатых: $Q_{\text{БОГАТ.}} = 80 - P$.

Предельные затраты на производство и поставку услуг по обороне оказались постоянными, не зависящими от объемов предоставления этих услуг, и составили 120 ден.ед. на каждую единицу этой услуги.

А) Необходимо определить равновесный объем предоставления услуг по обороне, а также цены, которые будет уплачивать каждая из групп за данный равновесный объем услуг по обороне.

Б) Что произойдет, если правительство страны поставит на голосование в парламенте предложение о введении единой цены за услуги по обороне в виде налога в размере 40 ден.ед. за единицу оборонных услуг и одновременного увеличения производства услуг по обороне на 5 единиц сверх равновесного объема?

Решение:

Задание А

1. Обозначим общий объем производства услуг по обороне как Q , а объем потребления этих услуг каждой из групп, как обозначено в условии задачи: $Q_{\text{БЕД.}}$; $Q_{\text{СРЕД.}}$; $Q_{\text{БОГАТ.}}$.

Так как оборона страны – это общественное благо, то объем потребления каждой из групп будет одинаков и равен объему предоставления этой услуги:

$$Q_{\text{БЕД.}} = Q_{\text{СРЕД.}} = Q_{\text{БОГАТ.}} = Q$$

2. Каждая из групп населения, оплачивая свою цену за услугу по обороне, получает предельную выгоду от предоставленных услуг в соответствии со своими потребностями. В этой связи уплачиваемая цена каждой группой будет равна предельной выгоде, получаемой от обороны страны:

$$P_{\text{БЕД.}} = MB_{\text{БЕД.}}$$

$$P_{\text{СРЕД.}} = MB_{\text{СРЕД.}}$$

$$P_{\text{БОГАТ.}} = MB_{\text{БОГАТ.}}$$

3. Запишем функции спроса на оборону для каждой группы, выразив их через функции цен спроса, т.к. каждая из групп в любом случае будет потреблять одинаковое количество услуг по обороне, но платить разную цену за эти услуги:

$$P_{\text{БЕД.}} = MB_{\text{БЕД.}} = 30 - Q, \text{ при } Q \leq 30$$

$$P_{\text{СРЕД.}} = MB_{\text{СРЕД.}} = 70 - Q, \text{ при } Q \leq 70$$

$$P_{\text{БОГАТ.}} = MB_{\text{БОГАТ.}} = 80 - Q, \text{ при } Q \leq 80$$

Эти уравнения показывают, что для каждой из групп выгода от услуг по обороне (МВ) будет равна нулю, если объем этих услуг будет превышать соответствующее значение количества услуг по обороне, необходимого каждой из групп. Т.е. большее количество этих услуг каждая из групп оплатить не может.

4. Общий спрос на оборону всех групп, взятых вместе, равен сумме цен, которые готовы заплатить каждая из групп:

$$P_D = P_{\text{БЕД.}} + P_{\text{СРЕД.}} + P_{\text{БОГАТ.}}$$

или

$$P_D = MB_{\text{БЕД.}} + MB_{\text{СРЕД.}} + MB_{\text{БОГАТ.}} = (30 - Q) + (70 - Q) + (80 - Q)$$

5. Находим равновесный объем услуг по обороне для всех групп.

Для этого суммируем групповые функции спроса и приравниваем их к предельным затратам на производство единицы услуг по обороне ($MC = 120$), т.к. условие равновесия – это равенство предельной выгоды и предельных издержек ($P_D = MC$):

$$(30 - Q) + (70 - Q) + (80 - Q) = 120$$

$$180 - 3Q = 120 \rightarrow Q = 20 \text{ (равновесный объем услуг по обороне)}$$

6. Для определения цен, которые будет платить каждая из групп, подставим найденное равновесное значение услуг по обороне в каждую из групповых функций цены спроса:

$$P_{\text{БЕД.}} = MB_{\text{БЕД.}} = 30 - Q = 30 - 20 = 10 \text{ ден.ед.}$$

$$P_{\text{СРЕД.}} = MB_{\text{СРЕД.}} = 70 - Q = 70 - 20 = 50 \text{ ден.ед.}$$

$$P_{\text{БОГАТ.}} = MB_{\text{БОГАТ.}} = 80 - Q = 80 - 20 = 60 \text{ ден.ед.}$$

Задание Б

1. Увеличение объема производства услуг по обороне на 5 единиц дает значение 25 единиц. В этом случае выгода от услуг по обороне для каждой из групп составит:

$$MB_{\text{БЕД.}} = 30 - Q = 30 - 25 = 5 \text{ ден.ед.}$$

$$MB_{\text{СРЕД.}} = 70 - Q = 70 - 25 = 45 \text{ ден.ед.}$$

$$MB_{\text{БОГАТ.}} = 80 - Q = 80 - 25 = 55 \text{ ден.ед.}$$

2. Однако правительство предлагает ввести единую плату за оборону в виде налога, равного 40 ден. ед.

Сравним плату, которую предлагает ввести правительство с выгодами каждой группы, которые они получают от увеличившегося объема услуг по обороне:

Группы населения	Получаемые выгоды	Плата за получаемые выгоды (налог)	Решение группы на голосовании в парламенте
Бедная группа населения	5 ден.ед.	40 ден.ед	$5 < 40 \rightarrow$ группа будет голосовать против предложений правительства
Средний класс	45 ден.ед.	40 ден.ед	$45 > 40 \rightarrow$ группа будет голосовать за предложения правительства
Богатая группа населения	55 ден.ед.	40 ден.ед	$55 > 40 \rightarrow$ группа будет голосовать за предложения правительства

В результате бедная группа населения останется в меньшинстве при голосовании и будет принято правительственное решение.

Ответ:

Задание А: 1) Равновесный объем услуг по обороне страны составит 20 единиц.

2) Стоимость услуг по обороне для каждой из групп:

- бедная группа оплачивает 10 ден.ед.

- средний класс оплачивает 50 ден.ед.

- богатая группа оплачивает 60 ден.ед.

Задание Б: Объем услуг по обороне составит 25 единиц а каждая группа будет платить налог в размере 40 ден.ед.

Задача № 2

В конце 2011 года Россия вступила во Всемирную торговую организацию (ВТО). Членство страны в этой организации имеет как свои плюсы, так и минусы. Одним из отрицательных последствий такого вступления может быть то, что ряд важных отраслей национального хозяйства могут оказаться неконкурентоспособными против дешевой зарубежной продукции. В частности, среди уязвимых отраслей нашего хозяйства экономисты отмечают отрасль по производству мяса.

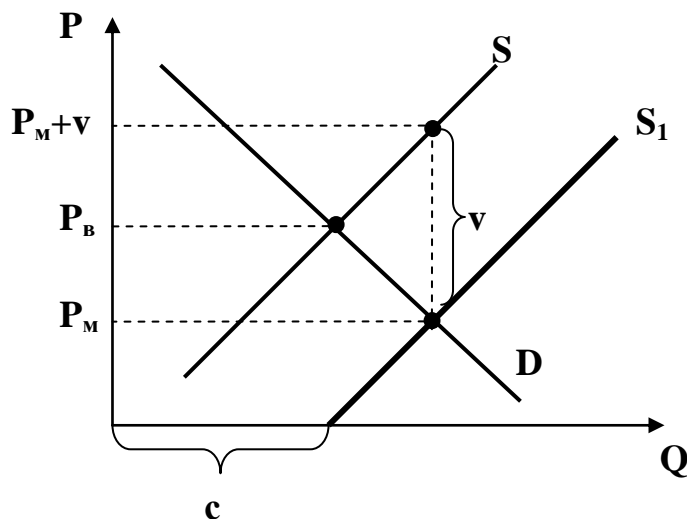
Допустим, что Правительство нашей страны в качестве защиты отечественных производителей мясной продукции рассматривает введение субсидии, чтобы импорт мясной продукции из-за рубежа стал экономически невыгодным для иностранных производителей. Если субсидия будет введена для наших производителей, то это, очевидно, не повлияет на цену мяса, установившуюся на мировом рынке в настоящее время. Одновременно наша страна выполнит требования этой международной организации о поддержании условий свободного перемещения товаров между странами – членами ВТО.

Сотрудники Министерства экономического развития РФ обосновали, в каком случае необходимо вводить такую субсидию и определили формулу, по которой можно рассчитать размер такой субсидии.

Обсудите, вслед за экономистами Министерства экономического развития РФ условия введения субсидии и определите формулу для расчета величины субсидии.

Решение

1. Для удобства и наглядности решения задачи надо построить гипотетические линии спроса и предложения мяса внутри нашей страны:



P_B – это равновесная цена на рынке мяса внутри страны

P_M – это цена на мясо на мировом рынке

v – это величина субсидии

2. По графику и по смыслу, очевидно, что если мировая цена будет выше цены на мясо внутри страны, то субсидия не нужна, т.к. импортерам будет невыгодно ввозить в нашу страну более дорогое мясо, чем у нас в стране.

Следовательно, условием введения субсидии будет превышение внутренней цены на мясо цены мирового рынка. Это ответ на первую часть задания.

3. Если мировая цена на мясо будет ниже внутренней цены необходимо ввести субсидию нашим производителям.

Величина субсидии должна быть такой, чтобы линия внутреннего предложения мяса сдвинулась из положения S в положение S_1 , уравнив при этом внутреннюю цену с мировой ценой (см. рисунок выше). Тогда агрессивный импорт в нашу страну станет экономически невыгодным.

4. Расчет формулы субсидии:

- линейная функция спроса описывается формулой: $Q_d = a - bP$

- линейная функция предложения описывается формулой: $Q_s = c + dP$

- равновесие внутреннего рынка мяса описывается уравнением:

$$a - bP_B = c + dP_B$$

- из этого уравнения найдем «с»:

$$c = a - bP_B - dP_B \quad (1)$$

- равновесие открытого внутреннего рынка мяса в нашей стране с учетом введенной субсидии будет описываться уравнением:

$$a - bP_M = c + d(P_M + v)$$

- преобразуем это выражение:

$$dv = a - bP_M - (c + dP_M) \quad (2)$$

- подставим в уравнение (2) выражение «с» из формулы (1):

$$dv = a - bP_M - (a - bP_B - dP_B + dP_M)$$

- преобразовав это уравнение, получим:

$$dv = bP_B + dP_B - bP_M - dP_M$$

- отсюда находим формулу для расчета субсидии:

$$v = (b/d + 1) \times (P_B - P_M).$$

Ответ:

1. Условие введение субсидии – цена внутреннего рынка мяса больше мировой цены на мясо.

2. Формула для расчета субсидии: $v = (b/d + 1) \times (P_B - P_M)$.

Задача № 3

На рынке некоторой продукции присутствуют 100 фирм-производителей. Издержки производства каждой из присутствующих фирм заданы функцией вида $TC = q^2 - 2q + 2$, где q - количество производимой продукции каждой отдельной фирмой. Спрос на продукцию на рынке стороны потребителей задан функцией вида $Q = 1500 - 50P$, где Q - количество покупаемой всеми потребителями продукции, P – цена единицы продукции.

1. Каковы величины равновесной цены и равновесного объема продаж?

2. Как изменятся эти величины в случае введения на рынке потоварной дотации производителю в размере 2 рубля на каждую единицу продукции.

Решение:

1. Функция предложения отдельной фирмы $MC = 2q - 2 = P$, $q = 1 + 0,5P$

Предложение 100 фирм в целом $Q = 100 + 50P$

Равновесные цена и объем продаж $1500 - 50P = 100 + 50P$, $1400 = 100P$, $P = 14$, $Q = 800$

2. При введении потоварной дотации на единицу продукции функция издержек каждой фирмы изменится $TC = q^2 - 2q + 2 - 2q$

Следовательно, изменится предложение отдельной фирмы и предложение всего рынка $MC = 2q - 2 - 2q = -4 = P$, $q = 2 + 0,5P$

Предложение 100 фирм в целом $Q = 200 + 50P$

Равновесные параметры рынка после введения налога определяются из условия пересечения прежней функции спроса и новой функции предложения $1500-50P=200+50P$, $1300=100P$, $P=13$, $Q=850$

Ответ:

$P=14$, $Q=800$

$P=13$, $Q=850$

МАТЕМАТИКА

Задача №1.

Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ и $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1}$ при всех натуральных n . Сколько членов этой последовательности являются кубами натуральных чисел? *Решение.* Перепишем соотношение $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + a_n + a_{n+1}$ в виде

$$a_{n+2} + 1 = (a_{n+1} + 1)(a_n + 1).$$

Пусть $a_n + 1 = b_n$. Тогда $b_{n+2} = b_{n+1} b_n$. Учитывая условия $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, получаем, что все b_n являются целыми неотрицательными степенями числа 3. Тогда для любого n при некотором целом неотрицательном k имеет место равенство $a_n = 3^k - 1$. Пусть $3^k - 1 = x^3$.

Тогда

$$3^k = (x+1)(1-x+x^2),$$

и, следовательно, $x+1$ и $1-x+x^2$ являются степенями числа 3. Так как, очевидно, $x \neq 1$, то $x \geq 2$. Таким образом, $x+1 \leq 1-x+x^2$, и, следовательно, $1-x+x^2$ делится на $x+1$. Так как

$$1-x+x^2 = 3-1-x-1+x^2 = 3-(1+x)-(1-x^2),$$

то $x+1$ делит 3. Следовательно, $x+1=3$ и $x=2$. Таким образом, в данной последовательности есть ровно один член, являющийся кубом натурального числа.

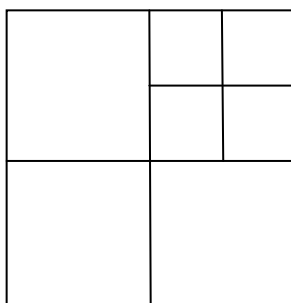
Ответ: один.

Задача №2.

Найдите такое наименьшее нечётное число n , что квадрат можно разрезать на n меньших квадратов.

Решение:

Поскольку никакой из меньших квадратов не может содержать сразу две вершины исходного квадрата и n нечётно, то $n \geq 5$. Так как на 5 квадратов исходный квадрат разбить нельзя, а на семь можно (см. рисунок), то наименьшее значение n равно 7.



Ответ: 7.

Задача №3.

В некоторой финансовой компании у каждого сотрудника не более трёх врагов. Какое наименьшее число отделов должно быть в компании, чтобы, распределив сотрудников компании по этим отделам, можно было бы добиться того, что у каждого сотрудника в одном с ним отделе было не более одного врага.

Решение:

Докажем, что достаточно двух отделов. Сначала разобьём всех сотрудников компании произвольным образом на два отдела. Для каждого отдела посчитаем число пар врагов, попавших в него и сложим полученные числа. Предположим, что у некоторого сотрудника A в одном с ним отделе есть по крайней мере два врага. Переведём сотрудника A в другой отдел. Тогда в отделе, в котором сотрудник A был сначала, число пар врагов уменьшится по крайней мере на две пары, а в новом отделе может появиться не более одной новой пары врагов. Поэтому суммарное число пар врагов в обоих отделах после перевода сотрудника A в другой отдел уменьшится. Следовательно, до тех пор пока у какого-либо сотрудника в одном с ним отделе есть по крайней мере два врага мы можем построить новое разбиение на отделы, в котором суммарное число пар врагов в обоих отделах уменьшится. В конце концов мы получим нужное разбиение на отделы.

Ответ: 2.