Заключительный этап
олимпиады школьников СПбГУ по математике

1. Автолюбители Хэмильтон и Баттон выехали одновременно из Монте-Карло и едут в одном и том же направлении. Хэмильтон едет со скоростью $50\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, Баттон — $40\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Спустя полчаса из Монте-Карло в том же направлении выехал Шумахер, который обогнал Хэмильтона на 1 час 30 минут позже, чем Баттона. Найти скорость автомобиля Шумахера.
2. Найти все целые решения уравнения $\cos\left(\dfrac{1000!\cdot\pi}{2^x}\right) = 0$.
(1000! есть произведение всех натуральных чисел от 1 до 1000).
3. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ удовлетворяют условию $2a+3b+6c=0$. Доказать, что это уравнение имеет корень на промежутке $[0;1]$.
4. Сколькими способами можно на клетчатой доске размером 10×10 расставить 18 шахматных слонов, не бьющих друг друга? Напомним, что шахматный слон бьет по диагонали любое число клеток.
5. Внутри треугольника ABC ($AB < BC$) лежит точка O, равноудаленная от трех его вершин. BD — биссектриса угла B. Точка M — середина стороны AC, а точка P на луче MO такова, что $\angle APC = \angle ABC$. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из P на BC. Доказать, что каждая из диагоналей четырехугольника $BDMN$ делит треугольник ABC на две равновеликие части.
6. Минута телефонного разговора стоит 2,99 рублей. Разговор возможен, пока текущий остаток на счете больше этой суммы. Платежи, вносимые абонентом, должны быть кратны 100 рублям, и с них удерживается комиссия 8%. Какова минимальная сумма, позволяющая абоненту звонить? Через какое наименьшее время разговора такая сумма может оказаться на счете?
7. Решить уравнение $4\cos x - \cos 3x + 3 = 3\sin 3x$.
8. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB равна c, а радиус описанной окружности равен R. Биссектрисы AA_1 и BB_1 делят противоположные стороны в отношении $m_1 : n_1$ и $m_2 : n_2$ соответственно, считая от вершины C. Найти радиус окружности, проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и через точки A_1 и B_1.
9. Найти количество корней уравнения $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right]$. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x).
10. Мальчик Коля отрезает от куска сыра, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами 2, 4, 8, ломтик на бутерброд. Сколько ребер может быть у среза ломтика? Какова наибольшая площадь среза, если он имеет прямой угол?

Ответы к заключительному этапу олимпиады школьников СПбГУ по математике

1. $60\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
2. $x = 995$.
4. 1024 способа.
6. 3 рубля 22 копейки; через 2 часа 2 минуты.
7. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pi + 2\pi k,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$
8. $\frac{m_1 m_2 c\sqrt{Rn_1^2(m_2+n_2)^2+Rn_2^2(m_1+n_1)^2+\sqrt{4R^2-c^2}n_1 n_2(m_1+n_1)(m_2+n_2)}}{n_1 n_2(m_1+n_1)(m_2+n_2)\sqrt{2R+\sqrt{4R^2-c^2}}}$.
9. 30 корней.
10. Срез может иметь 3, 4, 5 или 6 ребер; наибольшая площадь среза $16\sqrt{5}$.