Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|2y| + |2y-1| + |x| = 2$.

2) Решите уравнение $\sqrt{4x+1} = 2 + \sqrt[3]{8x-6}$.

3) Решите неравенство $\log_{x+2} \dfrac{x^2+5x}{2x-2} \le 1$.

4) При всех значениях параметра a решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2}\, a\,(\sin x - \cos x) = 1 + 2a$.

5) Найдите наименьшее значение функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

6) На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. Найдите радиус круга, касательного ко всем трем полукругам, если радиусы меньших полукругов равны 10 и 4.

7) Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна 90.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|2y| + |2y-1| + |x| = 2$.

2) Решите уравнение $\sqrt{4x+1} = 2 + \sqrt[3]{8x-6}$.

3) Решите неравенство $\log_{x+2} \dfrac{x^2+5x}{2x-2} \le 1$.

4) При всех значениях параметра a решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2}\, a\,(\sin x - \cos x) = 1 + 2a$.

5) Найдите наименьшее значение функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

6) На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. Найдите радиус круга, касательного ко всем трем полукругам, если радиусы меньших полукругов равны 10 и 4.

7) Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна 90.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|2y| + |2y-1| + |x| = 2$.

2) Решите уравнение $\sqrt{4x+1} = 2 + \sqrt[3]{8x-6}$.

3) Решите неравенство $\log_{x+2} \dfrac{x^2+5x}{2x-2} \le 1$.

4) При всех значениях параметра a решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2}\, a\,(\sin x - \cos x) = 1 + 2a$.

5) Найдите наименьшее значение функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

6) На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. Найдите радиус круга, касательного ко всем трем полукругам, если радиусы меньших полукругов равны 10 и 4.

7) Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения, если площадь боковой грани пирамиды равна 90.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|2y| + |2y + 1| + |x| = 2$.

2) Решите уравнение $\sqrt{2x+3} - 2 = \sqrt[3]{4x-2}$.

3) Решите неравенство $\log_x \dfrac{x^2+x-6}{2x-6} \geq 1$.

4) При всех значениях параметра a решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2}\, a\,(\sin x + \cos x) + 1 + 2a = 0$.

5) Найдите наименьшее значение функции $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6) На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. Найдите площадь круга, касательного ко всем трем полукругам, если радиусы меньших полукругов равны 8 и 2.

7) Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь боковой грани пирамиды, если площадь получившегося сечения равна 45.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|2y| + |2y + 1| + |x| = 2$.

2) Решите уравнение $\sqrt{2x+3} - 2 = \sqrt[3]{4x-2}$.

3) Решите неравенство $\log_x \dfrac{x^2+x-6}{2x-6} \geq 1$.

4) При всех значениях параметра a решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2}\, a\,(\sin x + \cos x) + 1 + 2a = 0$.

5) Найдите наименьшее значение функции $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6) На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. Найдите площадь круга, касательного ко всем трем полукругам, если радиусы меньших полукругов равны 8 и 2.

7) Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь боковой грани пирамиды, если площадь получившегося сечения равна 45.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|2y| + |2y + 1| + |x| = 2$.

2) Решите уравнение $\sqrt{2x+3} - 2 = \sqrt[3]{4x-2}$.

3) Решите неравенство $\log_x \dfrac{x^2+x-6}{2x-6} \geq 1$.

4) При всех значениях параметра a решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2}\, a\,(\sin x + \cos x) + 1 + 2a = 0$.

5) Найдите наименьшее значение функции $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6) На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. Найдите площадь круга, касательного ко всем трем полукругам, если радиусы меньших полукругов равны 8 и 2.

7) Через середину высоты правильной треугольной пирамиды, параллельно боковой грани, проведена плоскость. Найдите площадь боковой грани пирамиды, если площадь получившегося сечения равна 45.

Олимпиада по математике 2009 Вариант 1

1. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 + |4x - 2y| \le 5$.

2. Решить уравнение $\log_3 x = \sqrt{\log_2(9x) - \log_3 x^2}$.

3. Решить неравенство $x + \sqrt{x^2 - x} \ge 4\sqrt{x}$.

4. Решить уравнение $\sin 6x + 4\cos x = \sin 2x$.

5. Цилиндр с объемом V и конус такого же объема имеют общую плоскость основания, причем вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Найти объем общей части цилиндра и конуса.

Олимпиада по математике 2009 Вариант 2

1. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 - |4x + 2y| \le 5$.

2. Решить уравнение $\log_2 x = \sqrt{\log_3(4x) - \log_2 x^2}$.

3. Решить неравенство $x + \sqrt{x^2 + x} \ge 5\sqrt{x}$.

4. Решить уравнение $\cos 6x + 4\sin x = \cos 2x$.

5. Цилиндр с объемом V и конус в два раза большего объема имеют общую плоскость основания, причем вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Найти объем общей части цилиндра и конуса.

Председатель жюри олимпиады Ю.В. Чурин

Олимпиада по математике 2009 Вариант 1

1. Ровно в полдень из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. В это же время из B в A выехал велосипедист. Спустя 45 минут они встретились. Поговорив какое-то время, они продолжили свой путь. Велосипедист прибыл в A в 16 часов, а мотоциклист в B в 14 часов. Найти скорость мотоциклиста, если скорость велосипедиста равна 16 км/ч.

2. Решить уравнение $\sqrt{3x-\sqrt{x-\frac{1}{36}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Решить неравенство $\log_2^2 x \le \frac{\log_2 x^3}{\log_2 x-2}$.

4. Решить систему $\begin{cases} \sin x+\cos y=0 \\ 2|x|+|y|=\pi \end{cases}$.

5. Трапеция вписана в окружность. Найти ее радиус, если основания трапеции равны 4 и 6, а боковая сторона $\sqrt{2}$.

Олимпиада по математике 2009 Вариант 2

1. Ровно в полдень из пункта A в пункт B вышел пешеход. В это же время из B в A выехал велосипедист. Спустя 30 минут они встретились. Поговорив какое-то время, они продолжили свой путь. Велосипедист прибыл в A в 13 часов, а пешеход в B в 14 часов 20 минут. Найти скорость велосипедиста, если скорость пешехода равна 5 км/ч.

2. Решить уравнение $\sqrt{5x-\sqrt{x-\frac{1}{100}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Решить неравенство $\log_3^2 x \le \frac{\log_3 x^2}{\log_3 x-1}$.

4. Решить систему $\begin{cases} \cos x+\sin y=0 \\ 2|x|+|y|=\pi \end{cases}$.

5. Трапеция вписана в окружность. Найти ее радиус, если основания трапеции равны 1 и 3, а боковая сторона $\sqrt{5}$.

Председатель жюри олимпиады Ю.В. Чурин

Олимпиада по математике 2009 Вариант 1

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$|x^2+(2+a)x+1-a|=|3x^2-(4+a)x+a-1|$ имеет ровно три решения.

2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+9}}{3-2\sqrt{x}}\le 1$.

3. Решить уравнение $\sin 7x-\sin x+\cos^2 2x=\dfrac{1}{2}$.

4. Решить неравенство $\log_2(x-3)^2\cdot\log_3 x-\log_3(x-3)^2\ge 2-\log_2 x^2$.

5. Периметр прямоугольного треугольника ABC в три с половиной раза больше катета BC. Из точки M этого катета на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Найти CN, если $AM=29$.

Олимпиада по математике 2009 Вариант 2

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$|x^2+(5-a)x+1-a|=|3x^2+(3-a)x+1-a|$ имеет ровно три решения.

2. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}}{2-3\sqrt{x}}\le 1$.

3. Решить уравнение $\sin 7x+\sin 3x+\sin^2 x=\dfrac{1}{2}$.

4. Решить неравенство $\log_3(x-2)^2\cdot\log_2 x-\log_2(x-2)^2\ge 2-\log_3 x^2$.

5. Периметр прямоугольного треугольника ABC в два с половиной раза больше катета AC. Из точки M этого катета на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Найти BM, если $CN=24$.

Председатель жюри олимпиады Ю.В. Чурин

Олимпиада по математике 2009 Вариант 1

1. Указать количество решений уравнения $2^{3x}-4a2^{2x}+a^2 2^x+6a^3=0$ в зависимости от параметра a.

2. Решить систему $\begin{cases} \log_x y = 2\log_{xy^2} y \\ x-2y=8 \end{cases}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{x+\sqrt{2}}+\sqrt{x-\sqrt{2}}>\sqrt{2}$.

4. Решить уравнение $1+\sin 2x+\cos x=\sin x$.

5. Радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника равен 2, а его периметр равен P. Найти радиус описанной окружности треугольника и указать, при каких значениях P задача имеет решение.

Олимпиада по математике 2009 Вариант 2

1. Указать количество решений уравнения $3^{3x}-7a^2 3^x-6a^3=0$ в зависимости от параметра a.

2. Решить систему $\begin{cases} 2\log_x y = 3\log_{xy} y \\ x-2y=3 \end{cases}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{x+\sqrt{3}}+\sqrt{x-\sqrt{3}}>\sqrt{3}$.

4. Решить уравнение $1+\sin 2x+\sin x=\cos x$.

5. Радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника равен r, а его периметр равен 18. Найти радиус описанной окружности треугольника и указать, при каких значениях r задача имеет решение.

Председатель жюри олимпиады Ю.В. Чурин

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ
Олимпиада по математике. 2009г.. Вариант 1

1) Вычислите сумму $S = 5+55+555+\ldots\underbrace{5\,5\,5\ldots5}_{n\text{ знаков}}$. 2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{8}{x-y} - y, \\ xy = 15. \end{cases}$

3) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 2x\sin(x\,y) + 1 = 0$.

4) При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + 3ax + 5 = 0, \quad x^2 + 3x + 5a = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

5) Решите неравенство $\log_x(5-x)\cdot\log_{2x+2}(x-3) < 0$.

6) Основания высот остроугольного треугольника ABC со сторонами a, b и c служат вершинами треугольника KMN. Найдите периметр треугольника KMN.

7) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите площадь шара, проходящего через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ
Олимпиада по математике. 2009г.. Вариант 1

1) Вычислите сумму $S = 5+55+555+\ldots\underbrace{5\,5\,5\ldots5}_{n\text{ знаков}}$. 2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{8}{x-y} - y, \\ xy = 15. \end{cases}$

3) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 2x\sin(x\,y) + 1 = 0$.

4) При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + 3ax + 5 = 0, \quad x^2 + 3x + 5a = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

5) Решите неравенство $\log_x(5-x)\cdot\log_{2x+2}(x-3) < 0$.

6) Основания высот остроугольного треугольника ABC со сторонами a, b и c служат вершинами треугольника KMN. Найдите периметр треугольника KMN.

7) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите площадь шара, проходящего через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ
Олимпиада по математике. 2009г.. Вариант 1

1) Вычислите сумму $S = 5+55+555+\ldots\underbrace{5\,5\,5\ldots5}_{n\text{ знаков}}$. 2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{8}{x-y} - y, \\ xy = 15. \end{cases}$

3) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 2x\sin(x\,y) + 1 = 0$.

4) При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + 3ax + 5 = 0, \quad x^2 + 3x + 5a = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

5) Решите неравенство $\log_x(5-x)\cdot\log_{2x+2}(x-3) < 0$.

6) Основания высот остроугольного треугольника ABC со сторонами a, b и c служат вершинами треугольника KMN. Найдите периметр треугольника KMN.

7) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите площадь шара, проходящего через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ

Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2

1) Вычислите сумму $S = 7+77+777+\ldots\ \underbrace{777\ldots7}_{n\ \text{знаков}}$. 2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{20}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$

3) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - 2x\cos(x\,y) + 1 = 0$.

4) При каких значениях параметра b уравнения $x^2 - 2bx + 3 = 0$, $\quad x^2 - 2x + 3b = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

5) Решите неравенство $\log_{x-4}(2x) \cdot \log_{6-x}(x-1) < 0$.

6) Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами треугольника KMN. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если периметр треугольника KMN равен $2p$, а площадь треугольника ABC равна S.

7) Радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равен R. Найдите ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ

Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2

1) Вычислите сумму $S = 7+77+777+\ldots\ \underbrace{777\ldots7}_{n\ \text{знаков}}$. 2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{20}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$

3) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - 2x\cos(x\,y) + 1 = 0$.

4) При каких значениях параметра b уравнения $x^2 - 2bx + 3 = 0$, $\quad x^2 - 2x + 3b = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

5) Решите неравенство $\log_{x-4}(2x) \cdot \log_{6-x}(x-1) < 0$.

6) Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами треугольника KMN. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если периметр треугольника KMN равен $2p$, а площадь треугольника ABC равна S.

7) Радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равен R. Найдите ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ

Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2

1) Вычислите сумму $S = 7+77+777+\ldots\ \underbrace{777\ldots7}_{n\ \text{знаков}}$. 2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{20}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$

3) На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - 2x\cos(x\,y) + 1 = 0$.

4) При каких значениях параметра b уравнения $x^2 - 2bx + 3 = 0$, $\quad x^2 - 2x + 3b = 0$ имеют хотя бы один общий действительный корень?

5) Решите неравенство $\log_{x-4}(2x) \cdot \log_{6-x}(x-1) < 0$.

6) Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами треугольника KMN. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если периметр треугольника KMN равен $2p$, а площадь треугольника ABC равна S.

7) Радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равен R. Найдите ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) Найдите коэффициент при x^7 в разложении $(1 + 2x^2 + ... + 7x^7)^2$.

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = x + y - z, \\ xz = 2(x - y + z), \\ yz = 3(y - x + z). \end{cases}$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $0 \le x \le \dfrac{9}{2}$.

4) Решите неравенство $x \cdot 3^{\log_x 4} > 12$.

5) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-5} = a$ имеет решение?

6) Две окружности радиусов 5 и 15 касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

7) Шар радиуса R касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна γ. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) Найдите коэффициент при x^7 в разложении $(1 + 2x^2 + ... + 7x^7)^2$.

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = x + y - z, \\ xz = 2(x - y + z), \\ yz = 3(y - x + z). \end{cases}$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $0 \le x \le \dfrac{9}{2}$.

4) Решите неравенство $x \cdot 3^{\log_x 4} > 12$.

5) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-5} = a$ имеет решение?

6) Две окружности радиусов 5 и 15 касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

7) Шар радиуса R касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна γ. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) Найдите коэффициент при x^7 в разложении $(1 + 2x^2 + ... + 7x^7)^2$.

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = x + y - z, \\ xz = 2(x - y + z), \\ yz = 3(y - x + z). \end{cases}$

3) Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $0 \le x \le \dfrac{9}{2}$.

4) Решите неравенство $x \cdot 3^{\log_x 4} > 12$.

5) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-5} = a$ имеет решение?

6) Две окружности радиусов 5 и 15 касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

7) Шар радиуса R касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот. Сумма трех плоских углов при вершине пирамиды равна γ. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) Найдите коэффициент при x^6 в разложении $(1 + 2x^2 + ... + 6x^6)^2$.

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + yz + zx = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

3) Найдите все решения уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(4\sin x) = 1$, удовлетворяющие условию $\frac{3}{2} \le x \le 6$.

4) Решите неравенство $x \cdot 2^{\log_x 3} < 6$.

5) При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{x-5} - \sqrt{x-1} = b$ имеет решение?

6) Две окружности радиусов 4 и 12 касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

7) Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый их трех плоских углов при вершине пирамиды равен γ. Сумма боковых ребер равна $3a$. Найдите радиус шара.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) Найдите коэффициент при x^6 в разложении $(1 + 2x^2 + ... + 6x^6)^2$.

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + yz + zx = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

3) Найдите все решения уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(4\sin x) = 1$, удовлетворяющие условию $\frac{3}{2} \le x \le 6$.

4) Решите неравенство $x \cdot 2^{\log_x 3} < 6$.

5) При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{x-5} - \sqrt{x-1} = b$ имеет решение?

6) Две окружности радиусов 4 и 12 касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

7) Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый их трех плоских углов при вершине пирамиды равен γ. Сумма боковых ребер равна $3a$. Найдите радиус шара.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) Найдите коэффициент при x^6 в разложении $(1 + 2x^2 + ... + 6x^6)^2$.

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + yz + zx = -4, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

3) Найдите все решения уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(4\sin x) = 1$, удовлетворяющие условию $\frac{3}{2} \le x \le 6$.

4) Решите неравенство $x \cdot 2^{\log_x 3} < 6$.

5) При каких значениях параметра b уравнение $\sqrt{x-5} - \sqrt{x-1} = b$ имеет решение?

6) Две окружности радиусов 4 и 12 касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

7) Шар касается всех боковых граней треугольной пирамиды в центрах описанных около них окружностей. Каждый их трех плоских углов при вершине пирамиды равен γ. Сумма боковых ребер равна $3a$. Найдите радиус шара.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет $x^2 - 4|x^2 - x| = a$ три решения?

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

3) Решите неравенство $\log_{\cos x} \sqrt{1 - \cos 2x} \le 1$.

4) Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + x + 2x^2 + 3x^3)^5$.

5) Решите уравнение $x^2 \cdot 7^{\sqrt{3x-5}} + 7^{2+x} = 7^{\sqrt{3x-5}+2} + x^2 \cdot 7^x$.

6) Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(r < R)$. Найдите периметр правильного треугольника, у которого одна вершина находится на окружности радиуса r, а две другие лежат на окружности радиуса R.

7) Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 5, и перпендикуляр на боковую грань, равный 4. Найдите объем пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет $x^2 - 4|x^2 - x| = a$ три решения?

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

3) Решите неравенство $\log_{\cos x} \sqrt{1 - \cos 2x} \le 1$.

4) Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + x + 2x^2 + 3x^3)^5$.

5) Решите уравнение $x^2 \cdot 7^{\sqrt{3x-5}} + 7^{2+x} = 7^{\sqrt{3x-5}+2} + x^2 \cdot 7^x$.

6) Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(r < R)$. Найдите периметр правильного треугольника, у которого одна вершина находится на окружности радиуса r, а две другие лежат на окружности радиуса R.

7) Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 5, и перпендикуляр на боковую грань, равный 4. Найдите объем пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 1.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет $x^2 - 4|x^2 - x| = a$ три решения?

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

3) Решите неравенство $\log_{\cos x} \sqrt{1 - \cos 2x} \le 1$.

4) Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + x + 2x^2 + 3x^3)^5$.

5) Решите уравнение $x^2 \cdot 7^{\sqrt{3x-5}} + 7^{2+x} = 7^{\sqrt{3x-5}+2} + x^2 \cdot 7^x$.

6) Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(r < R)$. Найдите периметр правильного треугольника, у которого одна вершина находится на окружности радиуса r, а две другие лежат на окружности радиуса R.

7) Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 5, и перпендикуляр на боковую грань, равный 4. Найдите объем пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет $3|x^2 - x| - x^2 = a$ три решения?

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy + 2(x + y) - z^2 = 14. \end{cases}$

3) Решите неравенство $\log_{\sin x} \sqrt{1 + \cos 2x} \leq 1$.

4) Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + 2x + 3x^2 + x^3)^5$.

5) Решите уравнение $x^2 \cdot 9^{\sqrt{3x-5}} + 9^{2+x} = 9^{\sqrt{3x-5}+2} + x^2 \cdot 9^x$.

6) Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(r < R)$. Найдите площадь правильного треугольника, у которого одна вершина находится на окружности радиуса r, а две другие лежат на окружности радиуса R.

7) Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 6, и перпендикуляр на боковую грань, равный 5. Найдите объем пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет $3|x^2 - x| - x^2 = a$ три решения?

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy + 2(x + y) - z^2 = 14. \end{cases}$

3) Решите неравенство $\log_{\sin x} \sqrt{1 + \cos 2x} \leq 1$.

4) Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + 2x + 3x^2 + x^3)^5$.

5) Решите уравнение $x^2 \cdot 9^{\sqrt{3x-5}} + 9^{2+x} = 9^{\sqrt{3x-5}+2} + x^2 \cdot 9^x$.

6) Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(r < R)$. Найдите площадь правильного треугольника, у которого одна вершина находится на окружности радиуса r, а две другие лежат на окружности радиуса R.

7) Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 6, и перпендикуляр на боковую грань, равный 5. Найдите объем пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет. Факультет ПМ-ПУ.
Олимпиада по математике. 2009г. Вариант 2.

1) При каких значениях параметра a уравнение имеет $3|x^2 - x| - x^2 = a$ три решения?

2) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy + 2(x + y) - z^2 = 14. \end{cases}$

3) Решите неравенство $\log_{\sin x} \sqrt{1 + \cos 2x} \leq 1$.

4) Найдите коэффициент при x^3 в разложении $(1 + 2x + 3x^2 + x^3)^5$.

5) Решите уравнение $x^2 \cdot 9^{\sqrt{3x-5}} + 9^{2+x} = 9^{\sqrt{3x-5}+2} + x^2 \cdot 9^x$.

6) Даны две концентрические окружности радиусов r и R $(r < R)$. Найдите площадь правильного треугольника, у которого одна вершина находится на окружности радиуса r, а две другие лежат на окружности радиуса R.

7) Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 6, и перпендикуляр на боковую грань, равный 5. Найдите объем пирамиды.