САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Примеры заданий отборочного и заключительного этапов.

2012/2013 учебный год.

Председатель методической комиссии

Олимпиады школьников СПбГУ по математике,

член-корреспондент РАН,

декан Математико-механического факультета,

профессор, д.ф.-м.н. ________________________________ Г.А.Леонов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Примеры заданий отборочного этапа. 2012/2013 учебный год.

1. 1. *Найдите максимальную площадь остроугольного треугольника с наибольшей стороной 10 см.*

Ответ: $S = 25\sqrt{3}$ см^2.

Решение 1: Заметим, что в любом треугольнике найдется угол не больше чем $60°$, пусть это угол A треугольника ABC; отметим сразу, что тогда $\sin\angle A \leqslant \sqrt{3}/2$. Тогда площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin\angle A \leqslant 50 \cdot \sin 60° = 25\sqrt{3}$. Заметим, что равенство достигается для равностороннего треугольника со стороной 10.

Решение 2: Поскольку наибольшая сторона равна 10, то вершина, лежащая напротив этой стороны, должна находиться в пересечении кругов радиусом 10 с центрами в концах наибольшей стороны.

Если вычислять площадь треугольника как полупроизведение длин основания и высоты, опущенной на основание, а за основание взять наибольшую сторону, то максимум будет достигаться при наибольшей высоте, то есть в том случае, когда вершина, лежащая напротив наибольшей стороны, находится от нее на максимальном расстоянии, то есть является пересечением окружностей радиусом 10 с центрами в концах наибольшей стороны. Данный треугольник будет равносторонним.

Таким образом, получаем, что максимальная высота равна $5\sqrt{3}$, и, следовательно, максимальная площадь треугольника равна $25\sqrt{3}$.

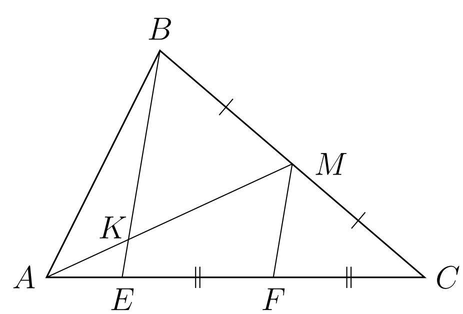
2. *Докажите, что площадь тупоугольного треугольника с наибольшей стороной 10 см не может быть равна 25,5 см^2.*

3. *Укажите диапазон значений, который может принимать площадь остроугольного треугольника, чья наибольшая сторона равна 5, а одна из оставшихся — 3.*

Ответ: $S \in (6,\, 3\sqrt{91}/4]$.

2. 1. *В треугольнике ABC точка K делит медиану AM в отношении $AK : KM = 1 : 2$. Прямая BK пересекает сторону AC в точке E. Найдите AE, если $AC = x$.*

Ответ: $x/5$.



Решение 1: Проведем $MF \,||\, BE$, тогда $EF = FC = y$. С другой стороны, $\dfrac{AK}{KM} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AE}{EF}$, следовательно, $AE = y/2$. Получаем $AC = x = y/2 + y + y = 5\,y/2$, и $AE = y/2 = x/5$.

Решение 2: По теореме Менелая

$$\frac{|AK|}{|KM|} \cdot \frac{|MB|}{|BC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x - |EA|}{|EA|} = 1 \Leftrightarrow |EA| = \frac{x}{5}.$$

2. *В треугольнике KLM точка A делит медиану MB в отношении $MA : AB = 2 : 3$. Прямая KA пересекает сторону ML в точке C. Найдите ML, если $MC = a$.*

   Ответ: $4a$.

3. 1. *Два равнобедренных треугольника с одинаковыми углами при основании, равными α, имеют общую сторону, равную a (треугольники соединены внешним образом). Найдите площадь получившегося четырехугольника.*

   Ответ: Площадь четырехугольника может принимать значения $a^2 \sin 2\alpha$, $\frac{1}{2}\, a^2 \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{1}{4}\, a^2 \operatorname{tg} \alpha + {} + \frac{1}{2}\, a^2 \sin 2\alpha$.

   Решение: Возможны следующие случаи расположения треугольников:

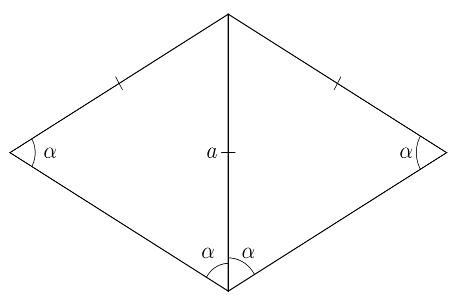


Рис. 1.

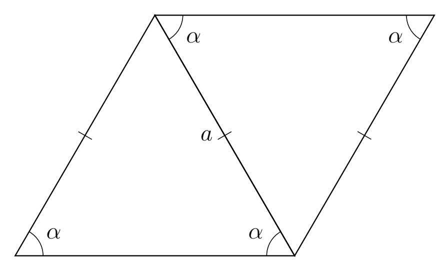


Рис. 2.

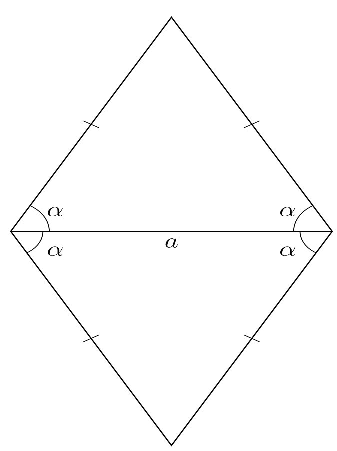


Рис. 3.

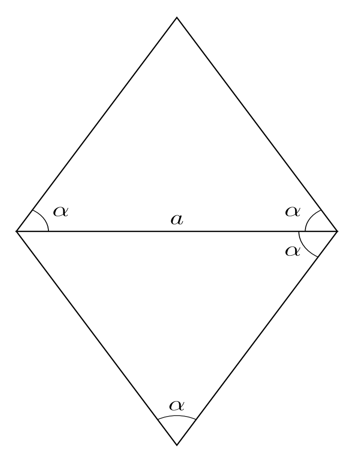


Рис. 4.

1) Треугольники имеют общую боковую сторону (Рис. 1 и 2), тогда $S = a^2 \sin 2\alpha$.

2) Треугольники имеют общее основание (Рис. 3), тогда $S = \frac{1}{2}\, a^2 \operatorname{tg} \alpha$.

3) Общая сторона является для одного треугольника основанием, для другого – боковой стороной (Рис. 4), тогда $S = \frac{1}{4}\,a^2 \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\,a^2 \sin 2\alpha$.

2. *Два равнобедренных треугольника с одинаковыми углами при основании, равными α, имеют общую сторону (треугольники соединены внешним образом). Площадь получившегося четырехугольника равна S. Найдите длину общей стороны треугольников.*

   Ответ: Длина общей стороны треугольников может принимать значения $\sqrt{2S/\operatorname{tg}\alpha}$, $\sqrt{S/\sin 2\alpha}$, $\sqrt{4S/(\operatorname{tg}\alpha + 2\sin 2\alpha)}$.

4. 1. *Действительные числа a, b, c таковы, что $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 1$ и $ab+bc+ca > 0$. Докажите, что $a+b+c - \dfrac{abc}{ab+bc+ca} \geqslant 4$.*

   Решение: Из первого условия приведением к общему знаменателю получаем, что a^2+b^2+ $+c^2+3(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(c+a)$. Домножая нужное нам неравенство на $ab+bc+ca$, получаем

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc \geqslant 4(ab+bc+ca).$$

   Раскрывая скобки, легко понять, что

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc = (a+b)(b+c)(c+a).$$

   Складывая неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ с двумя аналогичными и сокращая на 2, получаем, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Следовательно, получаем $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc =$ $= (a+b)(b+c)(c+a) = a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca) \geqslant 4(ab+bc+ca)$. Что и требовалось доказать.

2. *Действительные числа a, b, c и d таковы, что $a+b+c+d=0$ и $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{abcd}=0$. Какие значения может принимать выражение $(ab-cd)(c+d)$?*

   Ответ: $(ab-cd)(c+d) = -1$.

5. 1. *Сравните числа* $\dfrac{1}{2012}\cdot\dfrac{3}{2010}\cdot\dfrac{5}{2008}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2011}{2}$ *и* $\dfrac{2012!}{2^{2012}\cdot 1005!\cdot 1007!}$

   (здесь $n!$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

   Ответ: Первое число больше второго.

   Решение 1: Преобразуем каждое из чисел:

$$\frac{1}{2012}\cdot\frac{3}{2010}\cdot\frac{5}{2008}\cdot\ldots\cdot\frac{2011}{2} = \frac{2012!}{(2^{1006}\cdot 1006!)^2} = \frac{2012!}{2^{2012}\cdot 1006!\cdot 1005!\cdot 1006};$$

$$\frac{2012!}{2^{2012}\cdot 1005!\cdot 1007!} = \frac{2012!}{2^{2012}\cdot 1005!\cdot 1006!\cdot 1007}.$$

   Следовательно, знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй дроби.

2. *Сравните числа* $\dfrac{2}{2013}\cdot\dfrac{4}{2011}\cdot\dfrac{6}{2009}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2014}{1}$ *и* $\dfrac{2^{2014}\cdot 1006!\cdot 1008!}{2014!}$

   (здесь $n!$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

   Ответ: Первое число меньше второго.

6. 1. *После приготовления десертов остались груши и апельсины. Оказалось, что масса груши равна сумме квадратов масс оставшихся груш и всех апельсинов, а масса апельсина равна сумме квадратов масс оставшихся апельсинов и всех груш. Сколько весят груши и сколько весят апельсины, если всего осталось 10 фруктов.*

Ответ: Вес груши равен весу апельсина и равен 1/9.

Решение: Пусть вес апельсина — a, а вес груши — b и пусть осталось A апельсинов. Тогда имеем

$$\begin{cases} b = Aa^2 + (9-A)b^2, \\ a = (10-A)b^2 + (A-1)a^2. \end{cases}$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем $a - b = b^2 - a^2$. Такое возможно только при $a = b$, так как $a + b \neq -1$.

Таким образом, получаем, что $a = 9a^2$. Откуда $a = 1/9$.

2. *Имеются выпуклый четырехугольник и выпуклый пятиугольник, не имеющие общих точек. Найдите длины сторон каждого из многоугольников, если известно, что каждая из сторон четырехугольника равна сумме квадратов длин сторон пятиугольника, а каждая из сторон пятиугольника равна сумме квадратов длин сторон четырехугольника.*

Ответ: Каждая из сторон четырехугольника равна $1/2\sqrt[3]{10}$; каждая из сторон пятиугольника равна $1/\sqrt[3]{100}$.

7. 1. *Дед Василий как-то в молодости отправился в путешествие и первую половину пути проехал на велосипеде со средней скоростью 15 км/час, а вторую половину прошел пешком, со средней скоростью 5 км/час. Впоследствии дед рассказывал внукам, что в том путешествии преодолел 500 км за 20 часов. Докажите, что дед Василий ошибается в своих воспоминаниях.*

Решение 1: Поскольку средняя скорость на первой половине пути равна $v_1 = \frac{S/2}{t_1} = 15$ км/час, а на второй — $v_2 = \frac{S/2}{t_2} = 5$ км/час, то средняя скорость на всем пути может быть вычислена как

$$v = \frac{S}{t_1 + t_2} = \left(\frac{t_1}{S} + \frac{t_2}{S}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2 \cdot 15} + \frac{1}{2 \cdot 5}\right)^{-1} = \frac{15}{2} \text{ км/час.}$$

С другой стороны, на основании воспоминаний деда Василия, средняя скорость его передвижения в том путешествии была бы равна $\tilde{v} = \frac{500}{20} = 25$ км/час.

Очевидно, $v \neq \tilde{v}$.

Решение 2: Заметим, что средняя скорость на всем пути v не превосходит максимума из скоростей на разных участках пути, то есть

$$v \leqslant \max\{v_1, v_2\} = 15 \text{ км/час} < \frac{500}{20} = 25 \text{ км/час.}$$

2. *Мальчик Петя говорит, что у него средний балл по алгебре равен 3,8, а по геометрии — 4,2. Мама Пети считает, что средний балл ее сына по алгебре и геометрии вместе взятым равен 4,7. Докажите, что кто-то из них ошибается.*

3. *Как известно, в состав марципана входят только миндаль и сахар. В Новосамсоньевске изготавливают марципан с массовой долей орехов 30 %, а в Старосамсоньевске — с массовой долей сахара 80 %. Удастся ли из них получить эквивалент марципана, изготавливающегося в Баденбурге и содержащего 50 % миндаля?*

   Ответ: Нет, не удастся.

8. 1. *Пятачок придумал желание и гадает на ромашке о том, сбудется оно или нет. Ромашка махровая с лепестками, расположенными двумя ярусами, причем лепестки располагаются строго друг под другом и в каждом ярусе лепестков нечетное число. При гадании можно отрывать соседний справа, слева, сверху или снизу лепесток от только что оторванного. Желание сбывается, если в конце концов остается три лепестка в каком-либо одном ярусе и они не являются соседними. Сможет ли желание Пятачка сбыться? Если нет, то почему. Если да, то опишите последовательность отрывания лепестков.*

   Ответ: Да, может сбыться.

   Решение: Занумеруем лепестки в ярусах: в верхнем ярусе через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а лепестки под ними через a, b, c, d, e, f, g, h, i соответственно. Пусть Пятачок оторывает лепестки в следующем порядке: a, b, 2, 3, c, d, e, 5, 6, f, g, h, 8, 9, i. Заметим, что остались лепестки 1, 4, 7, которые не являются соседними. Отметим, что если лепестков в ярусе будет не больше 7, то такой пример невозможен, так как нельзя будет выбрать три лепестка попарно не соседних и не через один в одном ярусе. Примеры для больших 9 нечетные чисел строятся аналогичным образом.

2. *Пятачок придумал желание и гадает на ромашке о том, сбудется оно или нет. Ромашка махровая с лепестками, расположенными двумя ярусами, причем лепестки располагаются строго друг под другом и в каждом ярусе лепестков нечетное число. При гадании можно отрывать соседний справа, слева, сверху или снизу лепесток от только что оторванного. Желание сбывается, если в конце концов остается по одному лепестку в каждом ярусе и они не расположены друг над другом. Сможет ли желание Пятачка сбыться? Если нет, то почему. Если да, то опишите последовательность отрывания лепестков.*

   Ответ: Да, может сбыться.

3. *Возвращаясь из школы, Петя считал количество проезжающих машин марок Мерседес и Шевроле. Оказалось, что машин марки Шевроле проехало больше. Дома Петя записал закономерность – удвоенная разность квадратов количества машин Шевроле и Мерседес равна их утроенному произведению. Можно ли определить - четным или нечетным было количество встреченных Петей машин каждой из марок?*

   Ответ: Количество машин Шевроле четное, четность количества машин Мерседес установить невозможно.

   Решение: Обозначим, x – количество машин марки Шевроле, y – количество машин марки Мерседес. По условию задачи составим уравнение $2\,(x^2 - y^2) = 3\,xy$, которое решаем как квадратное относительно x. Получаем соотношение $x = 2\,y$.

4. *Пенсионерка Лариса Ивановна попросила внучку Таню помочь провести учет домашних заготовок на зиму. По подсчетам Тани оказалось, что если к квадрату количества банок варенья прибавить утроенное произведение количества банок варенья на количество банок соленых огурцов, то получится число в 10 раз большее, чем квадрат количества банок огурцов. Можете ли Вы определить - четным или нечетным было количество посчитанных Таней банок варенья и соленых огурцов?*

Ответ: Количество банок варенья четное, четность количества банок огурцов установить невозможно.

9. 1. *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение*

$$[2 - x^2] = a\left(\{x^2 - 1\} - 1\right)$$

имеет нечетное количество решений (здесь $[t]$ — целая часть t, то есть наибольшее целое, не превосходящее t, а $\{t\}$ — дробная часть t, то есть $\{t\} = t - [t]$).

Ответ: $a = -2$.

Решение: Поскольку функции $l(x) = [2 - x^2]$ и $r(x) = a\left(\{x^2 - 1\} - 1\right)$ четные, то нечетное количество точек пересечения они могут иметь лишь тогда, когда одной из таких точек является $x = 0$. Отсюда получаем условие

$$[2] = a\left(\{-1\} - 1\right) \Leftrightarrow a = -2.$$

Осталось проверить, что при $a = -2$ уравнение имеет лишь конечное число решений.

Способ 1. Заметим, что функция $r(x) \in (0,\, 2]$, следовательно, уравнение может иметь решения только тогда, когда левая часть принимает значения из того же промежутка, то есть равна 1 или 2 в силу целочисленности. Тогда $1 \leqslant 2 - x^2 < 3$, откуда $x \in [-1,\, 1]$, причем

$$\left\{\begin{array}{l} l(x) = 2, \text{ если } x = 0, \\ l(x) = 1, \text{ если } x \in [-1,\, 0) \cup (0,\, 1] \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \{x^2\} = 0, \; x = 0 \\ \{x^2\} = \frac{1}{2}, \; x \in [-1,\, 0) \cup (0,\, 1] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Способ 2. Заметим, что $l(x) = 0$, если $x = 0$, $l(x) = 1 - n$, если $x \in \left[-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}\right) \cup \left(\sqrt{n}, \sqrt{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а функция $r(x)$ на каждом из промежутков $\left(-\sqrt{n+1}, -\sqrt{n}\right]$ и $\left[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, монотонна, а ее область значений на каждом из них — промежуток $(0,\, 2]$. Следовательно, функции могут иметь только конечное число точек пересечения.

2. *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение*

$$[1{,}5 - x^2] = a\left(\{x^2 - 0{,}5\} - 2\right)$$

имеет нечетное количество решений (здесь $[t]$ — целая часть t, то есть наибольшее целое, не превосходящее t, а $\{t\}$ — дробная часть t, т.е. $\{t\} = t - [t]$).

Ответ: $a = -2/3$.

10. 1. *Найдите три нечетных делителя числа*
$125^3 \cdot (106^2 - 102^2) + 106^3 \cdot (102^2 - 125^2) + 102^3 \cdot (125^2 - 106^2)$.

Ответ: Например, $1,\ 19,\ 23$.

Решение: Для удобства выполнения преобразований введем обозначения $a = 125,\ b = 106,\ c = 102$. Разложим на множители выражение $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$. Это выражение — кубический многочлен относительно a, два его корня, очевидно, b и c. Тогда третий корень по теореме Виета равен $-bc/(b + c)$. Раскладывая многочлен на множители, мы получим искомое разложение: $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) = (a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ac)$. Очевидно, среди делителей заданного числа содержатся нечетные числа $125 - 106 = 19$ и $125 - 102 = 23$. Этого достаточно,чтобы ответить на вопрос задачи.

2. *Найдите три нечетных делителя числа*
$125^3 \cdot (108^2 - 106^2) + 108^3 \cdot (106^2 - 125^2) + 106^3 \cdot (125^2 - 108^2)$.

Ответ: Например, $1,\ 17,\ 19$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2012/2013 учебный год.

Задания для 8–9 классов.

Вариант 1

1. *Найдите все пары квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ такие, что a и b — корни второго трехчлена, а c и d — корни первого трехчлена.*

Ответ: $x^2 + x - 2$ и $x^2 + x - 2$, а также $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$ при любом a.

Решение. Из теоремы Виета $-a = c + d$ и $-c = a + b$. Следовательно, $b = d$. Снова воспользуемся теоремой Виета, получим, что $b = cd$ и $d = ab$. При $b = d \neq 0$ отсюда следует, что $a = c = 1$ и, значит, $b = d = -a - c = -2$. Если же $b = d = 0$, то a любое и $c = -a$.

2. *Девять последовательных натуральных чисел таковы, что сумма квадратов первых пяти из них равна сумме квадратов остальных чисел. Какими могут быть эти числа? Приведите все варианты ответов и докажите, что других нет.*

Ответ: 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44.

Решение. Пусть наши числа — $n - 4$, $n - 3$, …, $n + 4$. По условию имеем $(n - 4)^2 + (n - 3)^2 + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 + (n + 4)^2$, то есть $5n^2 - 20n + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 4n^2 + 20n + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$, или $n^2 = 40n$. Из двух решений этого уравнения $n = 0$ не подходит, так как наши числа должны быть натуральными, а оставшееся значение $n = 40$ дает ответ: числа 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44.

3. *У Васи есть 9 палочек по 5 см и 9 палочек по 6 см. Он хочет, разломав несколько палочек, сложить из всех получившихся кусков равносторонний 11-угольник. Каким наименьшим количеством разломов он может обойтись?*

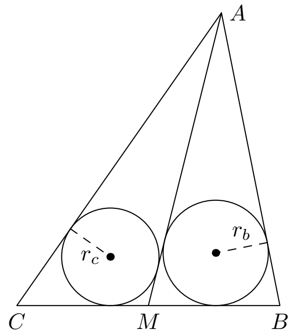
Ответ: 7.

Решение. Общая длина всех палочек составляет 99 см, поэтому стороны 11-угольника должны быть по 9 см. Разломаем 3 шестисантиметровых палочки пополам и приставим по кусочку к 6 оставшимся шестисантиметровым палочкам. Получим шесть девятисантиметровых сторон. Теперь отломаем от 4 пятисантиметровых палочек по куску длиной 1 см. Все отломанные куски приложим к одной из оставшихся пятисантиметровых палочек, а оставшиеся четырёхсантиметровые куски — по одному к остальным оставшимся пятисантиметровым палочкам. Получим 11 девятисантиметровых сторон.

Покажем, что 6 разломов не хватит. В самом деле, если мы сделали 6 разломов, то по крайней мере 12 палочек остались целыми. Значит, в составе по крайней мере одной из сторон 11-угольника окажется хотя бы две целых палочки. Но суммарная длина любых двух целых палочек больше 9см.

4. *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, быть ровно в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM?*

Ответ: нет.



Решение. Пусть r_b и r_c — радиусы окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABM и ACM. Тогда

$$r_b(AB + AM + MB) = 2S_{ABM} = 2S_{ACM} = r_c(AC + AM + MC).$$

Если $r_b = 2r_c$, то

$$2(AB + AM + MB) = AC + AM + MC = AC + AM + MB.$$

После приведения подобных слагаемых останется равенство $2AB + AM + MB = AC$. Но это невозможно, поскольку по неравенству треугольника $AM + MB = AM + MC > AC$. Противоречие.

5. *На доске написаны цифры 2, 3, 4, 5. Разрешается, выбрав несколько из них, составить из них число n, а затем число n умножить 19, и цифры полученного числа записать обратно на доску вместо взятых цифр. (Например, выбрав цифры 2, 3, 4, мы можем составить из них число 324 и записать вместо них $324 \cdot 19 = 6156$, причем цифра 6 записывается два раза. Таким образом, на доске после этого действия будут записаны цифры 1, 5, 5, 6, 6). Можно ли с помощью таких операций добиться того, чтобы на доске были записаны цифры 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7?*

Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что числа n и $19n$ имеют одинаковые остатки при делении на 3, которые совпадают с остатками при делении на 3 сумм цифр этих чисел. Поэтому проводимые операции не меняют остаток от деления на 3 суммы всех находящихся на доске чисел. Но сначала он равен 2, а в конце 0.

6. *Пусть n — натуральное число, большее 10. Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, …, $n!+n$ есть простой делитель, на который не делится ни одно из остальных. Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.*

Решение. Для каждого числа $n! + k$ будем выбирать его простой делитель p_k, удовлетворяющий условию задачи. Заметим, что $(n! + k, n! + m) = (n! + k, m - k)$, что при $1 \leqslant k \neq m \leqslant n$ является делителем $m - k$ и, значит, меньше n.

Пусть мы нашли у числа $n! + k$ простой делитель $p_k \geqslant n$. Тогда никакое из чисел вида $n! + m$ на него не делится, поскольку $0 \neq |m - k| < n \leqslant p_k$. Стало быть, он подходит.

Пусть мы нашли у числа $n! + k$ простой делитель $p_k \in (n/2, n)$. Предположим, что на него также делится и $n! + m$ при $m \neq k$. Поскольку $p_k < n$, число $n!$ кратно p_k и, значит, k кратно p_k. Тогда $k = p_k$, ибо $n/2 < p_k \leqslant k < n$. С другой стороны $|m - k|$ делится на $k = p_k$. Но тогда $|m - k| \geqslant k$ и $m \geqslant 2k > n$, что невозможно.

Итак, осталось разобрать случай, когда все простые делители числа $n! + k$ меньше, чем $n/2$. Возьмем один такой делитель p. Тогда k делится на p и $n!$ делится на p^2. Значит, число $(n! + k)/k = n!/k + 1$ не может делиться на p. Но тогда у числа $(n! + k)/k$ нет ни одного простого делителя. Следовательно, $(n! + k)/k = 1$, что невозможно.

Вариант 2

1. *Найдите все пары квадратных трехчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d такие, что a и $-b$ — корни второго трехчлена, а c и $-d$ — корни первого трехчлена.*

Ответ: x^2-x-2 и x^2-x-2, а также x^2+ax и x^2-ax при любом a.

Решение. Из теоремы Виета $-a=c-d$ и $-c=a-b$. Следовательно, $b=d$. Снова воспользуемся теоремой Виета, получим, что $b=c(-d)=-cd$ и $d=a(-b)=-ab$. При $b=d\neq 0$ отсюда следует, что $a=c=-1$ и, значит, $b=d=a+c=-2$. Если же $b=d=0$, то a любое и $c=-a$.

2. *Одиннадцать последовательных натуральных чисел таковы, что сумма квадратов первых шести из них равна сумме квадратов остальных чисел. Какими могут быть эти числа? Приведите все варианты ответов и докажите, что других нет.*

Ответ: 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65.

Решение. Пусть наши числа — $n-5$, $n-4$, …, $n+5$. По условию имеем $(n-5)^2+(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+5)^2$, то есть $6n^2-30n+(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=5n^2+30n+(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$, или $n^2=60n$. Из двух решений этого уравнения $n=0$ не подходит, так как наши числа должны быть натуральными, а оставшееся значение $n=60$ дает ответ: числа 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65.

3. *У Васи есть 10 палочек по 6 см и 10 палочек по 7 см. Он хочет, разломав несколько палочек, сложить из всех получившихся кусков равносторонний 13-угольник. Каким наименьшим количеством разломов он может обойтись?*

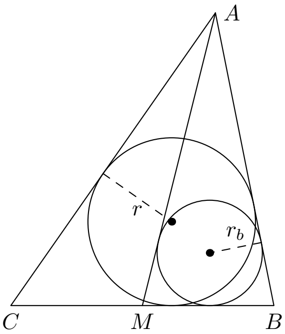
Ответ: 7.

Решение. Общая длина всех палочек составляет 130 см, поэтому стороны 13-угольника должны быть по 10 см. Разломаем каждую из 5 семисантиметровых палочек на палочки 3 см и 4 см и приставим трехсантиметровые кусочки к 5 оставшимся семисантиметровым палочкам. А четырехсантиметровые кусочки приставим к 5 шестисантиметровым палочкам. Получим 10 десятисантиметровых сторон. Теперь отломаем от 2 шестисантиметровых палочек по куску длиной 2 см. Все отломанные куски приложим к одной из оставшихся шестисантиметровой палочек, а оставшиеся четырёхсантиметровые куски — по одному к остальным оставшимся шестисантиметровым палочкам. Получим 13 десятисантиметровых сторон.

Покажем, что 6 разломов не хватит. В самом деле, если мы сделали 6 разломов, то по крайней мере 12 палочек остались целыми. Значит, в составе по крайней мере одной из сторон 13-угольника окажется хотя бы две целых палочки. Но суммарная длина любых двух целых палочек больше 10 см.

4. *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, быть ровно в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABM?*

Ответ: нет.



Решение. Пусть r и r_b — радиусы окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABC и ABM. Тогда

$$2r_b(AB + AM + MB) = 4S_{ABM} = 2S_{ABC} = r(AB + BC + CA).$$

Если $r = 2r_b$, то

$$AB + AM + MB = AB + AC + BC = AB + AC + MB + MC.$$

После приведения подобных слагаемых останется равенство $AC + MC = AM$, что противоречит неравенству треугольника.

5. *На доске написаны цифры* 5, 6, 7, 8. *Разрешается, выбрав несколько из них, составить из них число n, а затем число n умножить* 13, *и цифры полученного числа записать обратно на доску вместо взятых цифр. (Например, выбрав цифры* 5, 6, 7, *мы можем составить из них число* 576 *и записать вместо них* $576 \cdot 13 = 7488$, *причем цифра* 8 *записывается два раза. Таким образом, на доске после этого действия будут записаны цифры* 4, 7, 8, 8, 8*). Можно ли с помощью таких операций добиться того, чтобы на доске были записаны цифры* 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8*?*

Ответ: нельзя.

Решение. Заметим, что числа n и $13n$ имеют одинаковые остатки при делении на 3, которые совпадают с остатками при делении на 3 сумм цифр этих чисел. Поэтому проводимые операции не меняют остаток от деления на 3 суммы всех находящихся на доске чисел. Но сначала он равен 2, а в конце 0.

6. *Пусть n —* нечетное *натуральное число, большее 10. Докажите, что у каждого из каждого из чисел $n!! + 1$, $n!! + 3$, $n!! + 5$, $n!! + 7$, …, $n!! + n$ есть простой делитель, на который не делится ни одно из остальных. Как обычно, $n!!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность, что и n. Например, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.*

Решение. Для каждого числа $n!! + k$ будем выбирать его простой делитель p_k, удовлетворяющий условию задачи. Заметим, что $(n!! + k, n!! + m) = (n!! + k, m - k)$, что при $1 \leqslant k \neq m \leqslant n$ является делителем $m - k$ и, значит, меньше n.

Пусть мы нашли у числа $n!! + k$ простой делитель $p_k \geqslant n$. Тогда никакое из чисел вида $n!! + m$ на него не делится, поскольку $0 \neq |m - k| < n \leqslant p_k$. Стало быть, он подходит.

Пусть мы нашли у числа $n!! + k$ простой делитель $p_k \in (n/3, n)$. Предположим, что на него также делится и $n!! + m$ при $m \neq k$. Поскольку $p_k < n$, число $n!!$ кратно p_k и, значит, k кратно p_k. Тогда $k = p_k$, ибо $n/3 < p_k \leqslant k < n$. С другой стороны $|m-k|$ четно и делится на $k = p_k$. Но тогда $|m - k| \geqslant 2k$ и $m \geqslant 3k > n$, что невозможно.

Итак, осталось разобрать случай, когда все простые делители числа $n!! + k$ меньше, чем $n/3$. Возьмем один такой делитель p. Тогда k делится на p и $n!!$ делится на p^2. Значит, число $(n!! + k)/k = n!!/k + 1$ не может делиться на p. Но тогда у числа $(n!! + k)/k$ нет ни одного простого делителя. Следовательно, $(n!! + k)/k = 1$, что невозможно.

Вариант 3

1. *Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найти все целые значения x, при которых значения этого трехчлена являются квадратами простых чисел.*

Ответ: $x = 5$ и $x = 13$.

Решение. Пусть $f(x) = 2x^2 - x - 36$. Заметим, что $2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4)$. Следовательно, при интересующих нас x для некоторого простого числа p верно равенство $(2x - 9)(x + 4) = p^2$. Это возможно в нескольких случаях:

1) $2x - 9 = x + 4$. Тогда $x = 13$ и он подходит: $f(13) = 17^2$.

2) $x + 4 = \pm 1$. Тогда $x = -3$ или $x = -5$. Оба x не подходят: поскольку $f(-3) < 0$ и $f(-5) = 19$, что не является квадратом простого числа.

3) $2x - 9 = \pm 1$. Тогда $x = 4$ или $x = 5$. Первый случай не подходит, поскольку $f(4) < 0$, а второй подходит: $f(5) = 9 = 3^2$.

2. *Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство*

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geqslant \frac{6}{(a + b)^2}.$$

Решение. Воспользуемся неравенством $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x + y}$, которое легко проверяется с помощью домножения на знаменатели, для $x = 2ab$ и $y = a^2 + b^2$. Получим, что

$$\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geqslant \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a + b)^2}.$$

С другой стороны $(a + b)^2 \geqslant 4ab$, поэтому $\frac{1}{2ab} \geqslant \frac{2}{(a + b)^2}$. Осталось лишь сложить полученные неравенства.

3. *Каждая клетка доски 18×18 может быть покрашена в черный или белый цвет. Изначально все клетки белые. Разрешается перекрашивать все клетки какой-нибудь строчки или какого-нибудь столбца в противоположный цвет (белые – в чёрный, а чёрные – в белый). Можно ли получить раскраску, содержащую ровно 16 черных клеток?*

Ответ: нельзя.

Первое решение. Заметим, что если строка (или столбец) была перекрашена чётное число раз, то это всё равно, что её не перекрашивали, если нечётное число раз, это всё равно, что её перекрашивали один раз. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда каждый столбец и каждую строку перекрашивали не больше одного раза. Если получилась раскраска с 16 чёрными клетками, чёрные клетки будут не более чем в 16 строках и 16 столбцах. Поэтому найдутся целиком белые столбец и строка. Но это возможно только в случае, если мы вообще ничего не перекрашивали.

Второе решение. Заметим, что если строка (или столбец) была перекрашена чётное число раз, то это всё равно, что её не перекрашивали, если нечётное число раз, это всё равно, что её перекрашивали один раз. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда каждый столбец и каждую строку перекрашивали не больше одного раза. Пусть перекрашивалось k строк и n столбцов. Тогда цвет поменяли те клетки, которые попали в перекрашиваемую строку и неперекрашиваемый столбец (таких $k(18-n)$) или наоборот (таких $n(18-k)$). Таким образом получаем уравнение

$$k(18-n)+n(18-k)=16,$$

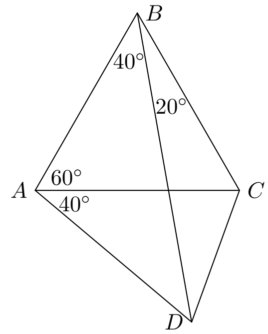
которое после сокращения на 2 может быть преобразовано к виду

$$(k-9)(n-9)=73.$$

Но оно не имеет решений, поскольку правая часть делится на простое число 73, а каждый из множителей левой части находится в промежутке $[-8,9]$.

4. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle CAD=\angle DBA=40^\circ$, $\angle CAB=60^\circ$, $\angle CBD=20^\circ$. Найдите $\angle CDB$.*

Ответ: 30°.



Первое решение. Заметим, что $\angle CBA=\angle CBD+\angle DBA=60^\circ=\angle CAB$. Поэтому треугольник ABC — равносторонний. Кроме того, $\angle ADB=180^\circ-\angle CAD-\angle CAB-\angle DBA=40^\circ=\angle DBA$. Следовательно, треугольник BAD равнобедренный и, значит, $AC=AB=AD$. Поэтому $\angle ADC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CAD)=70^\circ$ и $\angle CDB=\angle ADC-\angle ADB=70^\circ-40^\circ=30^\circ$.

Второе решение. Заметим, что $\angle CBA=\angle CBD+\angle DBA=60^\circ=\angle CAB$. Поэтому треугольник ABC — равносторонний и, в частности, $AB=AC$. Кроме того, $\angle ADB=180^\circ-\angle CAD-\angle CAB-\angle DBA=40^\circ=\angle DBA$. Следовательно, треугольник BAD равнобедренный и, значит, $AC=AB=AD$. Тогда окружность с центром в точке A и радиусом AC проходит через точки B, C и D. Осталось заметить, что искомый угол вписанный и опирается на дугу BC, которая равна 60°. Стало быть, $\angle CDB=30^\circ$.

5. *На доске 30 раз написано положительное число x. Разрешается стереть любое число и взамен выписать на доску два числа, которые в два раза меньше стертого. При каком наибольшем натуральном k можно гарантировать, что в наборе в любой момент времени найдётся k равных чисел?*

Ответ: $k=16$.

Решение. Допустим, что $k\leqslant 15$. Тогда есть такой набор чисел, в котором каждое число встречается не более 15 раз. Пусть самое маленькое число в нем равно $x/2^m$. Тогда сумма всех этих чисел не превосходит $15x(2^{-m}+2^{-m+1}+\dots+1)$, что меньше $15x$. Противоречие. Итак, $k\geqslant 16$. Осталось построить пример, когда нет 17 равных чисел. Для этого сохраним 16 чисел x, а 14 разделим пополам. Получится 28 чисел $x/2$. Из них 16 сохраним, оставшиеся 12 снова поделим пополам, получим 24 числа $x/4$. Из них 16 сохраним, оставшиеся 8 снова поделим пополам, получим 16 чисел $x/8$.

6. *Натуральные числа x и y таковы, что $1 < x < y$ и $x^3 - 1$ делится на $xy - 1$. Докажите, что y — точный квадрат.*

Решение. Из условия следует, что на $xy - 1$ делится разность

$$(x^3 - 1) - (xy - 1) = x^3 - xy = x(x^2 - y).$$

Поскольку числа x и $xy - 1$ взаимно просты, разность $x^2 - y$ также делится на $xy - 1$. Заметим, что $-y < x^2 - y < xy - 1$ (последнее неравенство следует из того, что $x < y$). Но в промежутке от $-y$ до $xy - 1$ на $xy - 1$ делится только 0. Следовательно, $y = x^2$.

Вариант 4

1. *Квадратный трехчлен $ax^2 + bx - 23 = 0$ с целыми коэффициентами a и b имеют два различных целых корня одного знака. Чему может быть равен коэффициент a?*

Ответ: -1.

Решение. Пусть x_1 и x_2 корни трехчлена. По теореме Виета $x_1x_2 = -23/a$. Поскольку они одного знака, $x_1x_2 > 0$ и, значит, a отрицательно. Кроме того a является делителем 23. Следовательно, $a = -1$ или $a = -23$. Во втором случае $x_1x_2 = 1$, что невозможно для различных целых чисел x_1 и x_2. Первый случай возможен при $x_1 = 1$ и $x_2 = 23$.

2. *Положительные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют равенствам $a^2 + b^2 = c^2$ и $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите неравенство $(a + x)^2 + (b + y)^2 \leqslant (c + z)^2$.*

Решение. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых и сокращения на 2 доказываемое неравенство примет вид

$$ax + by \leqslant cz = \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}.$$

Возведем его в квадрат и получим неравенство $(ax + by)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$, которое с помощью очередного раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых превращается в очевидное неравенство $2axby \leqslant a^2y^2 + b^2x^2$.

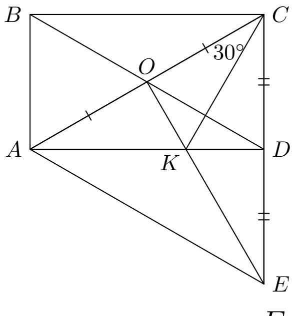
3. *На шахматной доске (8×8) выбраны точки A, B, C, не лежащие на границах клеток доски. В каком наибольшем количестве точек стороны треугольника ABC могут пересекать границы клеток?*

Ответ: 28.

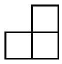
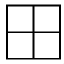
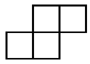
Решение. Поскольку никакая сторона треугольника ABC не идёт по границам клеток, каждая из семи линий, по которым граничат горизонтали доски, и каждая из семи линий, по которым граничат вертикали доски, пересекает контур треугольника не больше двух раз. Поэтому всего стороны нашего треугольника пересекают стороны клеток доски не больше 28 раз. Пример на 28 получится, если взять точки A и B внутри двух противоположных угловых клеток доски, а точку C произвольно, но так, чтобы стороны треугольника не проходили через вершины клеток.

4. *Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а на стороне AD выбрана точка K такая, что $AK = 2$, $KD = 1$. Оказалось, что $\angle ACK = 30°$. Чему может быть равен отрезок OK?*

Ответ: 1.



Решение. На луче CD отметим такую точку E, что $DE = CD$. Тогда отрезки AD и EO являются медианами треугольника ACE. Значит они делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$. Но в том же отношении точка K делит отрезок AD. Следовательно, отрезок EO проходит через точку K. Через неё же проходит и третья медиана CF этого треугольника. В силу симметрии $\angle AEK = \angle ACK = 30°$. Опустим из точки K перпендикуляр KH на AF. В прямоугольном треугольнике EKH угол $\angle KEH = 30°$, поэтому катет KH равен половине гипотенузы KE. Таким образом, $KH = \frac{1}{2}KE = KD = KF$. Второе равенство, поскольку K делит медиану EO в отношении $2:1$, а третье в силу симметрии. Итак, длина высоты KH равна длине наклонной KF. Это возможно только, если точки H и F совпадают. Следовательно, CF — высота в треугольнике ACE и, значит, он равнобедренный и $AC = EC$. Но в силу симметрии $AC = AE$. Стало быть, треугольник ACE равносторонний. Поэтому $KO = KD = 1$.

5. *Доску 7×7 разрезали по клеточкам на фигурки вида* , , . *Сколько могло получиться четырехклеточных фигурок?*

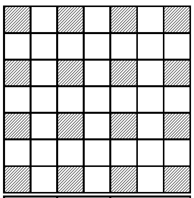
Ответ: одна.

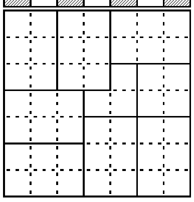
Решение. Покрасим 16 клеток доски как показано на рисунке. Пусть получилось k трехклеточных фигурок и n четырехклеточных. Поскольку каждая фигурка покрывает не более одной закрашенной клетки, $k + n \geqslant 16$. С другой стороны $3k + 4n = 49$. Следовательно,

$$49 = 3k + 4n = 3(k + n) + n \geqslant 3 \cdot 16 + n = 48 + n.$$

Таким образом, $n \leqslant 1$. Поскольку 49 не делится на 3, хотя бы одна четырехклеточная фигурка должна присутствовать.

Осталось показать, что так разрезать можно. Например, разрезаем на квадрат 2×2, семь прямоугольников 2×3 и один “уголок” как показано на рисунке, а затем каждый из прямоугольников 2×3 разрезаем на два уголка.





6. *Сколько решений в натуральных числах, меньших* $2\,000\,000$*, имеет уравнение* $(m - n)^2 = \dfrac{4mn}{m + n - 1}$*?*

Ответ: 3996.

Первое решение. Найдем все решения, в которых $m > n$ (очевидно, решения, в которых $n > m$, получаются из них переменой порядка m и n, поэтому их столько же, а натуральных решений с $m = n$ быть не может). Заметим, что $4mn = (m + n)^2 - (m - n)^2$. Тогда по условию $(m - n)^2(m + n - 1) = (m + n)^2 - (m - n)^2$ и, значит,

$$(m - n)^2 = m + n.$$

Положим $m - n = k$, тогда $m + n = k^2$. Следовательно,

$$m = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{и} \quad n = \frac{k(k-1)}{2},$$

где k — любое натуральное число, большее 1 (при $k = 1$ число n оказывается не натуральным). Кроме того $k \leqslant 1999$, поскольку при $k \geqslant 2000$ имеем $m \geqslant \frac{2000 \cdot 2001}{2} > 2\,000\,000$. В итоге получаем 1998 решений с $m > n$, а всего их вдвое больше.

Второе решение. Найдем все решения, в которых $m > n$ (очевидно, решения, в которых $n > m$, получаются из них переменой порядка m и n, поэтому их столько же, а натуральных решений с $m = n$ быть не может). Пусть d — наибольший общий делитель чисел m и n. Тогда $m = du$, $n = dv$, где $(u, v) = 1$. Сокращая исходное уравнение на d^2, получаем $(u - v)^2 = 4uv/(du + dv - 1)$. Поскольку числа u и v взаимно просты друг с другом, они взаимно просты и со своей разностью, так что $(u-v)^2$ должно быть делителем 4, и $u - v$ равно 1 или 2. Разберем эти два случая по отдельности.

1) Если $u - v = 1$, уравнение принимает вид $4v(v+1) = d(2v+1) - 1$, откуда $d = 2v+1$, $m = (v + 1)(2v + 1)$, $n = v(2v + 1)$. Эти формулы дают натуральные решения исходного уравнения в числах, меньших $2\,000\,000$, при $1 \leqslant v \leqslant 999$ — 999 решений.

2) Если $u - v = 2$, то u и v являются двумя последовательными нечетными числами: $u = 2t + 1$, $v = 2t - 1$. Тогда исходное уравнение принимает вид $(2t + 1)(2t - 1) = 4td - 1$, откуда $d = t$, $m = t(2t + 1)$, $n = t(2t - 1)$. Эти формулы дают натуральные решения исходного уравнения в числах, меньших $2\,000\,000$, при $1 \leqslant t \leqslant 999$ — еще 999 решений.

Таким образом, решений с $m > n$ нашлось 1998, а всего решений вдвое больше.

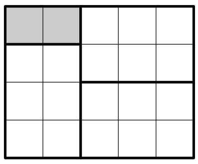
Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2012/2013 учебный год.

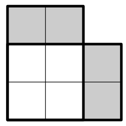
Задания для 10–11 классов.

Вариант 1

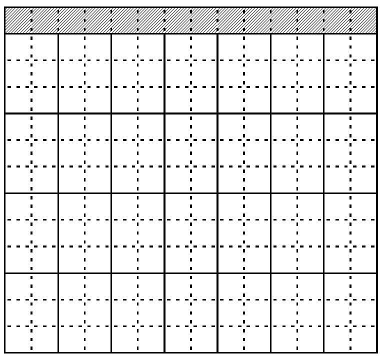
1. *В таблице 13 строк и 14 столбцов. В ней расставлены положительные числа. Известно, что произведение чисел в таблице равно 1, а произведение чисел в каждом из прямоугольников 2×3 и 3×2 равно 2. Найти произведение чисел, стоящих во второй и третьей клетках третьего столбца.*

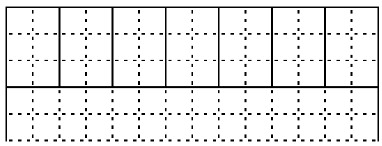
   Ответ: 2^{-30}.

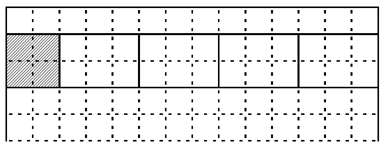




Решение 1. Замостим прямоугольниками 2×3 и 3×2 нижнюю полоску таблицы размером 9×14 и правый верхний угол таблицы размером 4×9 (это, очевидно, можно сделать). Оставшийся прямоугольник 4×5 без двух клеток заполним так, как показано на левом рисунке. Мы использовали $\left[\frac{13 \cdot 14}{6}\right] = 30$ прямоугольников, и произведение стоящих в них чисел равно 2^{30}. Поэтому произведение чисел в незаполненном прямоугольнике 1×2 равно 2^{-30}. Тогда 2^{-30} будет равно и произведение чисел в второй и третьей клетках третьего столбца: это следует из равенства произведений чисел в прямоугольниках, показанных на правом рисунке. $\square$







Решение 2. Замостим всю таблицу за исключением верхней строки 28 вертикальными прямоугольниками 2×3, как показано на левом рисунке. Поскольку произведение чисел в этих прямоугольниках равно 2^{28}, а произведение чисел во всей таблице равно 1, произведение чисел в верхней строке будет равно 2^{-28}. Разместим далее в ряд 7 вертикальных прямоугольников (см. правый верхний рисунок). Вместе они покрывают в точности первые три строки таблицы. Следовательно, произведение всех чисел, стоящих в этих строках, равно 2^7. Таким образом, произведение всех чисел, стоящих во второй и третьей строках, равно $2^7 : 2^{-28} = 2^{35}$. Разместим теперь во второй и третьей строке горизонтально 4 прямоугольника так, чтобы самый левый квадрат 2×2 оказался свободным (см. правый нижний рисунок). Произведение чисел, стоящих в этом квадрате равно $2^{35} : 2^4 = 2^{31}$. Наконец, вторая и третья клетки третьего столбца вместе с этим квадратом 2×2 образуют прямоугольник 3×2, произведение чисел в котором равно 2. Следовательно, произведение чисел, стоящих во второй и третьей клетках третьего столбца, равно $2 : 2^{31} = 2^{-30}$. $\square$

Замечание. Из условия задачи не вытекает какая-либо регулярность расстановки чисел в таблице.

2. *Сумма положительных чисел a, b, c в семь раз меньше их произведения. Найти наименьшее значение выражения $ab + bc + ac$.*

Ответ: 63.

Решение 1. По условию $a+b+c = \frac{1}{7}abc$. Положим $a = x\sqrt{21}$, $b = y\sqrt{21}$, $c = z\sqrt{21}$. Тогда

$$\sqrt{21}\,(x+y+z) = 3\sqrt{21}\,xyz, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 3.$$

Поэтому

$$ab+bc+ac = 21(xy+yz+xz) = 21(xy + \frac{1}{xy} + yz + \frac{1}{yz} + xz + \frac{1}{xz} - 3) \geqslant 21\,(6-3) = 63.$$

В предпоследнем переходе мы использовали неравенство Коши для средних арифметического и геометрического, которое обращается в равенство при $x = y = z = 1$. $\square$

Решение 2. Заметим, что для любых положительных чисел x, y и z имеет место неравенство

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \geqslant 9,$$

которое при $x = y = z$ обращается в равенство. Действительно, раскрывая скобки, мы получим

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) = 3 + \Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) + \Big(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\Big) + \Big(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\Big) \geqslant 9,$$

поскольку сумма в каждой скобке не меньше двух. Положим теперь $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$. Тогда

$$ab+bc+ca \geqslant \frac{9}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}} = \frac{9}{\frac{a+b+c}{abc}} = \frac{9}{\frac{1}{7}} = 63.$$

Равенство будет достигаться в случае $ab = bc = ca$, то есть при $a = b = c$. Осталось заметить, что числа $a = b = c = \sqrt{21}$ удовлетворяют условию задачи. $\square$

3. *Восьмеричная запись числа x имеет вид $2013\,2013\ldots2013$, где блок 2013 повторяется n раз. Найти все натуральные n, при которых x делится на число с шестнадцатеричной записью 2013.*

Ответ: n кратно 14.

Решение. Пусть p и q — числа с восьмеричной и шестнадцатеричной записью 2013 соответственно. Тогда

$$p = 1035 = 5 \cdot 9 \cdot 23, \quad q = 8211 = 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 23.$$

Так как

$$x = p \cdot z_n, \quad \text{где} \;\; z_n = 1 + 8^4 + \ldots + 8^{4(n-1)},$$

нам достаточно выяснить, когда z_n делится на 7 и на 17. Заметим, что остатки от деления 8^4 на 7 и 17 равны соответственно 1 и -1. Поэтому

$$z_n - n \;\; \text{кратно} \;\; 7, \quad z_n - \tfrac{1}{2}\big(1-(-1)^n\big) \;\; \text{кратно} \;\; 17.$$

Таким образом, z_n делится на 7 и 17 тогда и только тогда, когда n кратно 7 и 2, то есть 14. $\square$

4. *Каждый из 250 школьников занимается хотя бы в одной, но не более чем в трех спортивных секциях. Известно, что в каждой секции состоят один или более школьников и составы любых двух секций различны. Каково максимально возможное количество секций?*

Ответ: 500.

Решение. Пусть выбран некоторый максимальный набор секций. Сделаем два замечания.

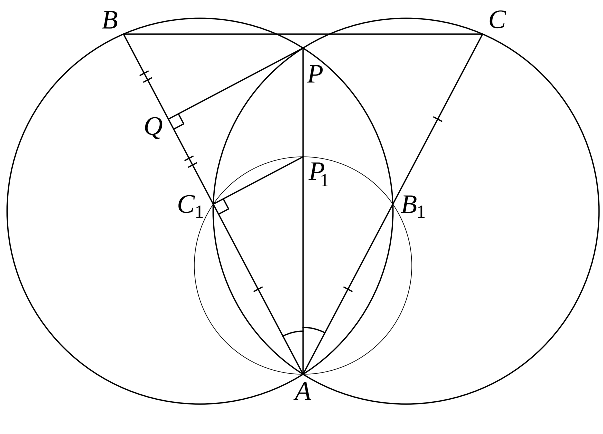
1) *Можно считать, что каждый ученик записан в секцию, состоящую только из него.* Пусть школьник x таков, что секции $\{x\}$ нет. Выберем какую-нибудь секцию A, в которую входит x, и заменим ее на $\{x\}$. В силу максимальности набора секция $A \setminus \{x\}$ существует. Каждый школьник по-прежнему занимается хотя бы в одной секции и, значит, новый набор тоже удовлетворяет условиям задачи.

2) *Можно считать, что в каждой секции не более двух человек.* Пусть нашлась секция A, в которую входят школьники a, b и c. Среди них есть двое (например, a и b), не образующих секцию (иначе ученик a был бы участником сразу четырех секций: $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ и A, что невозможно). Тогда заменим A на $\{a, b\}$. В силу максимальности набора секция $A \setminus \{a, b\}$ существует, поэтому новый набор тоже удовлетворяет условиям задачи.

Посчитаем максимальное количество секций с двумя участниками. Каждый ученик входит в не более чем две пары. Поэтому мы можем отождествить эти пары с набором ломаных на плоскости, вершины которых соответствуют школьникам. Максимальное число звеньев этих ломаных равно числу вершин, то есть 250. Поэтому в силу 1) и 2) общее число секций равно $250 + 250 = 500$. $\square$

5. *В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABB_1 и AC_1C, пересекаются в точках A и P. Прямая AP пересекает окружность, описанную около треугольника AC_1B_1, в точках A и P_1. Найти отношение $AP_1 : AP$.*

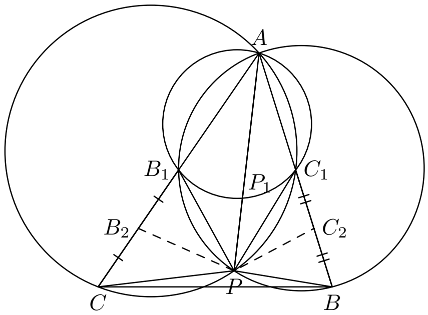
Ответ: $2 : 3$.



Решение 1. Треугольники ABB_1 и AC_1C одинаковы, поэтому равны и радиусы описанных около них окружностей. Угол APB вписан в первую из окружностей, а угол APC — во вторую. Эти углы равны, так как опираются на одинаковые хорды. Аналогичным образом $\angle ABP = \angle ACP$, откуда $\angle BAP = \angle CAP$. Так как $AB_1 = AC_1$, точки B_1 и C_1 симметричны относительно прямой AP_1, откуда AP_1 — диаметр описанной окружности треугольника AB_1C_1. Поэтому $\angle AC_1P_1 = 90°$.

Заметим также, что угол BAP опирается на дуги PB и PC_1 одинаковых окружностей. Тогда хорды PB и PC_1 равны и, значит, высота PQ треугольника BPC_1 делит отрезок BC_1 пополам. Поэтому треугольники AC_1P_1 и AQP подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$, откуда $AP_1 : AP = 2 : 3$. $\square$

На самом деле тот же ответ можно получить и без использования равнобедренности треугольника ABC. Приведем соответствующее решение.



Решение 2. Из вписанности четырехугольника $PBAB_1$ следует, что

$$\angle PBC_1 = \angle PBA = 180^\circ - \angle PB_1A = \angle PB_1C.$$

Аналогично из вписанности четырехугольника $PCAC_1$ вытекает, что

$$\angle PCB_1 = \angle PCA = 180^\circ - \angle PC_1A = \angle PC_1B.$$

Следовательно, треугольники PBC_1 и PB_1C подобны по двум углам. Пусть B_2 и C_2 середины отрезков CB_1 и BC_1 соответственно. Тогда треугольники BPC_2 и B_1PB_2 также подобны (по отношению сторон и углу между ними). Поэтому $\angle BPC_2 = \angle B_1PB_2$ и, значит, $\angle C_2PB_2 = \angle BPB_1 = 180^\circ - \angle BAC$ (последнее равенство вытекает из вписанности четырехугольника $PBAB_1$). Таким образом, четырехугольник AC_2PB_2 вписанный. Осталось заметить, что треугольник AB_1C_1 получается из треугольника AB_2C_2 гомотетией с коэффициентом $2/3$ и с центром в точке A. Следовательно, и описанная окружность треугольника AB_1C_1 получается гомотетией из описанной окружности треугольника AB_2C_2. Поскольку P и P_1 суть точки пересечения гомотетичных окружностей с лучом AP, эта гомотетия переводит точку P в точку P_1. Стало быть, $AP_1 : AP = 2 : 3$. $\square$

6. *Из листа железа толщиной 5 мм Вася вырезал правильный треугольник со стороной 6 см и три равнобедренных треугольника с основанием 6 см и боковой стороной $\sqrt{21}$ см. Торцы всех треугольников, изначально перпендикулярные их плоскостям, Вася заточил на станке, после чего из полученных деталей склеил правильную треугольную пирамиду без зазоров в стыках. Какая доля железа уйдет в отходы при наиболее экономном стачивании?*

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Решение. Склеенная Васей металлическая конструкция есть разность двух подобных правильных пирамид $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с основаниями ABC и $A'B'C'$ соответственно. Заметим, что при оптимальной заточке заготовок $AB = 6$ см и $AD = \sqrt{21}$ см. Обозначим угол между основанием ABC и боковой гранью ABD внешней пирамиды через 2α. Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{AD^2 - \frac{1}{4}AB^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2},$$

откуда $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Очевидно, что все торцы заготовки к основанию пирамиды нужно заточить под углом α к ее плоскости, после чего полученная деталь станет усеченной пирамидой $ABCA'B'C'$ с высотой 0,5 см. Заметим, что

$$A'B' = AB - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{6} = 6 - 3 = 3 \text{ см},$$

то есть внутренняя пирамида подобна внешней с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Склеенная Васей конструкция имеет объем

$$V_1 = \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{AD^2 - \tfrac{1}{3}AB^2} = \tfrac{7}{8} \cdot 9\sqrt{3} = \tfrac{63}{8}\sqrt{3},$$

а суммарный объем всех заготовок равен

$$V_2 = \tfrac{1}{2} \cdot (S_{ABC} + 3 \cdot S_{ABD}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(9\sqrt{3} + 9\sqrt{12}\right) = \tfrac{27}{2}\sqrt{3}.$$

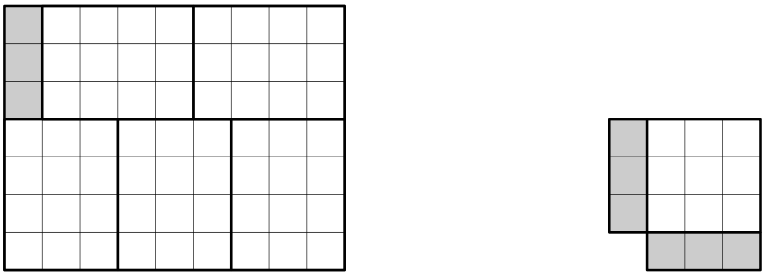
Поэтому доля потерь равна

$$\frac{V_2 - V_1}{V_2} = \frac{\frac{45}{8}\sqrt{3}}{\frac{27}{2}\sqrt{3}} = \frac{5}{12}. \quad \square$$

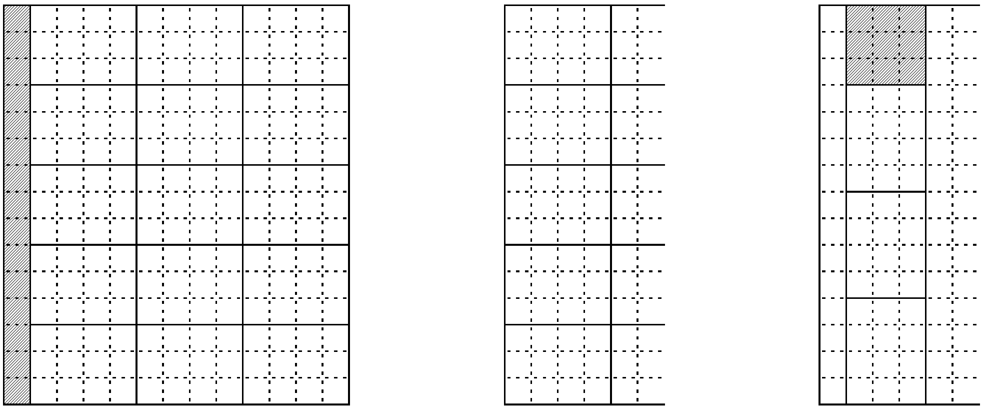
Вариант 2

1. *В таблице 15 строк и 13 столбцов. В ней расставлены положительные числа. Известно, что произведение чисел в таблице равно 1, а произведение чисел в каждом из прямоугольников 3×4 и 4×3 равно 3. Найти произведение чисел, стоящих во второй, третьей и четвертой клетках четвертой строки.*

   Ответ: 3^{-16}.



Решение 1. Замостим прямоугольниками 3×4 и 4×3 правую полоску таблицы размером 15×4 и левый нижний угол таблицы размером 8×9 (это, очевидно, можно сделать). Оставшийся прямоугольник 7×9 без трех клеток заполним так, как показано на левом рисунке. Мы использовали $\left[\frac{13 \cdot 15}{12}\right] = 16$ прямоугольников, и произведение стоящих в них чисел равно 3^{16}. Поэтому произведение чисел в незаполненном прямоугольнике 3×1 равно 3^{-16}. Тогда 3^{-16} будет равно и произведение чисел во второй, третьей и четвертой клетках четвертой строки: это следует из равенства произведений чисел в прямоугольниках, показанных на правом рисунке. $\square$



Решение 2. Замостим всю таблицу за исключением левого столбца 15 горизонтальными прямоугольниками 4×3, как показано на левом рисунке. Поскольку произведение чисел в этих прямоугольниках равно 3^{15}, а произведение чисел во всей таблице равно 1, произведение чисел в левом столбце равно 3^{-15}. Положим далее друг на дружку 5 горизонтальных прямоугольников (см. средний рисунок). Вместе они покрывают в точности первые четыре столбца таблицы. Следовательно, произведение всех чисел, стоящих в этих столбцах, равно 3^5. Таким образом, произведение всех чисел, стоящих во втором, третьем и четвертом столбцах, равно $3^5 : 3^{-15} = 3^{20}$. Разместим теперь во втором, третьем и четвертом столбцах вертикально 3 прямоугольника так, чтобы самый верхний квадрат 3×3 оказался свободным (см. правый рисунок). Произведение чисел, стоящих в этом квадрате, равно $3^{20} : 3^3 = 3^{17}$. Наконец, вторая, третья и четвертая клетки четвертой строки вместе с этим квадратом 3×3 образуют прямоугольник 4×3, произведение чисел в котором равно 3. Следовательно, произведение чисел, стоящих во второй, третьей и четвертой клетках четвертой строки, равно $3 : 3^{17} = 3^{-16}$. $\square$

Замечание. Из условия задачи не вытекает какая-либо регулярность расстановки чисел в таблице.

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $ab+bc+ac$ в пять раз больше, чем abc. Каково минимальное значение суммы этих чисел?*

Ответ: $\frac{9}{5}$.

Решение 1. По условию $ab+bc+ac=5abc$. Положим $a=\frac{3}{5}x$, $b=\frac{3}{5}y$, $c=\frac{3}{5}z$. Тогда

$$\frac{9}{25}\left(xy+yz+xz\right)=\frac{27}{25}xyz, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3.$$

Поэтому

$$a+b+c=\frac{3}{5}(x+y+z)=\frac{3}{5}\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}-3\right)\geqslant\frac{3}{5}(6-3)=\frac{9}{5}.$$

В предпоследнем переходе мы использовали неравенство Коши для средних арифметического и геометрического, которое обращается в равенство при $x=y=z=1$. $\square$

Решение 2. Заметим, что для любых положительных чисел a, b и c имеет место неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9,$$

которое при $a=b=c$ обращается в равенство. Действительно, раскрывая скобки, мы получим

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geqslant 9,$$

поскольку сумма в каждой скобке не меньше двух. Тогда

$$a+b+c\geqslant\frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{9}{\frac{ab+bc+ca}{abc}}=\frac{9}{5}.$$

Осталось заметить, что числа $a=b=c=\frac{3}{5}$ удовлетворяют условию задачи и обращают неравенство в равенство. $\square$

3. *Восьмеричная запись числа x имеет вид* $2013\,2013\ldots2013$, *где блок* 2013 *повторяется n раз. Найти все натуральные n, при которых x делится на квадрат числа с восьмеричной записью* 2013.

Ответ: n кратно 495.

Решение. Пусть p — число с восьмеричной записью 2013. Тогда

$$p=1035=5\cdot 9\cdot 23.$$

Так как

$$x=p\cdot z_n, \quad \text{где } z_n=1+8^4+\ldots+8^{4(n-1)},$$

нам достаточно выяснить, когда z_n делится на 5, 9 и 23. Заметим, что остатки от деления 8^4 на 5, 9 и 23 равны соответственно 1, 1 и 2. Тогда число z_n-n делится на 5 и 9, а остатки от деления z_n на 23 принимают значения

$$1, 3, 7, 15, 8, 17, 12, 2, 5, 11, 0$$

и далее повторяются с периодом 11. Таким образом, z_n делится на 5, 9 и 23 тогда и только тогда, когда n кратно 5, 9 и 11, то есть 495. $\square$

4. *Каждый ученик школы занимается хотя бы в одной, но не более чем в трех из 600 спортивных секций. Известно, что в каждой секции состоят один или более школьников и составы любых двух секций различны. Каково минимально возможное количество учеников в школе?*

Ответ: 300.

Решение. Пусть в школе учится минимально возможное количество учеников (обозначим его через n). Сделаем два замечания.

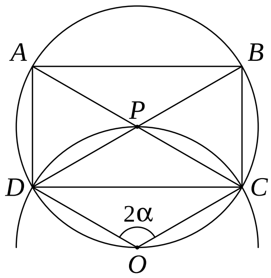
1) *Можно считать, что каждый ученик записан в секцию, состоящую только из него.* Пусть школьник x таков, что секции $\{x\}$ нет. Среди секций, содержащих x, найдется такая секция A, что секция $A \setminus \{x\}$ существует (иначе можно удалить ученика x из всех секций, что противоречит минимальности числа школьников). Тогда, заменив A на $\{x\}$, мы получим набор, удовлетворяющий условию задачи.

2) *Можно считать, что в каждой секции не более двух человек.* Пусть нашлась секция A, в которую входят школьники a, b и c. Среди них есть двое (например, a и b), не образующих секцию (иначе ученик a был бы участником сразу четырех секций: $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ и A, что невозможно). Тогда заменим A на $\{a, b\}$. Число учеников не может при этом увеличиться, поэтому новый набор удовлетворяет условию задачи.

Посчитаем максимальное количество секций с двумя участниками. Каждый ученик входит в не более чем две пары. Поэтому мы можем отождествить эти пары с набором ломаных на плоскости, вершины которых соответствуют школьникам. Минимальное число вершин этих ломаных равно числу звеньев. Поэтому в силу 1) и 2) мы получим $2n = 600$, то есть $n = 300$. $\square$

5. *Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Центры окружностей, описанных около треугольников APB и CPD, лежат на окружности, описанной около $ABCD$. Найти угол между прямыми AC и BD.*

Ответ: 60°.



Решение. Обозначим через O центр окружности, описанной около треугольника CPD, и положим $\angle COD = 2\alpha$. Поскольку четырехугольник $OCAD$ вписанный, мы получим $\angle CAD = 180^\circ - 2\alpha$. Заметим также, что вписанный угол CPD опирается на дугу, дополнительную к дуге CPD, откуда

$$\angle CPD = \tfrac{1}{2}\,(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Тогда

$$\angle APD = 180^\circ - \angle CPD = \alpha \quad \text{и} \quad \angle PDA = 180^\circ - \angle CAD - \alpha = \alpha.$$

Поэтому треугольник PAD равнобедренный и, следовательно, $AD = AP$. Аналогичное рассуждение, проведенное для окружности, описанной около треугольника APB, дает равенство $AD = DP$. Значит, треугольник PAD равносторонний, откуда $\angle APD = 60^\circ$. $\square$

6. *Из листа железа Петя вырезал квадрат со стороной $\sqrt{48}$ см и четыре равнобедренных треугольника с основанием $\sqrt{48}$ см и боковой стороной $\sqrt{60}$ см. Торцы всех фигур, изначально перпендикулярные их плоскостям, Петя заточил на станке, после чего из полученных деталей склеил правильную четырехугольную пирамиду без зазоров в стыках. Известно, что при наиболее экономном стачивании в отходы уйдет $\frac{5}{12}$ металла. Найти толщину листа железа.*

Ответ: 1 см.

Решение. Склеенная Петей металлическая конструкция есть разность двух подобных правильных пирамид $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ с основаниями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно. Заметим, что при оптимальной заточке заготовок $AB = \sqrt{48}$ см и $AE = \sqrt{60}$ см. Обозначим угол между основанием $ABCD$ и боковой гранью внешней пирамиды через 2α, а толщину железа — через d. Суммарный объем всех заготовок равен

$$V_1 = d \cdot (S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABE}) = d \cdot \left(48 + 2\sqrt{48} \cdot \sqrt{60 - 12}\right) = 144d.$$

Тогда склеенная Петей конструкция имеет объем $V_2 = \frac{7}{12} \cdot V_1 = 84d$. Кроме того,

$$\cos 2\alpha = \frac{\frac{1}{2}\,AB}{\sqrt{AE^2 - \frac{1}{4}\,AB^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{48}} = \frac{1}{2},$$

откуда $2\alpha = \frac{\pi}{3}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Очевидно, что все торцы квадратной заготовки нужно заточить под углом α к ее плоскости, после чего полученная деталь станет усеченной пирамидой $ABCDA'B'C'D'$ с высотой d. Заметим, что

$$A'B' = AB - 2d \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{48} - 2d\sqrt{3}, \quad \text{и} \quad \frac{A'B'}{AB} = 1 - \frac{d}{2}.$$

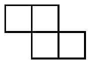
Тогда коэффициент подобия пирамид есть $k = 1 - \frac{d}{2}$, откуда $d = 2(1-k)$. Объем склеенной Петей конструкции равен также

$$V_2 = \left(1 - k^3\right) \cdot V_{ABCDE} = \left(1 - k^3\right) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 48 \cdot \sqrt{AE^2 - \tfrac{1}{2}AB^2} = 96\left(1 - k^3\right).$$

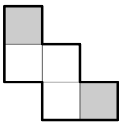
Приравнивая выражения для V_2, мы получим

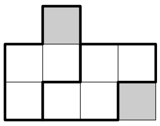
$$96\left(1 - k^3\right) = 84d = 168\,(1-k) \Leftrightarrow k^2 + k + 1 = \tfrac{7}{4} \Leftrightarrow k = \tfrac{1}{2} \text{ и } d = 1. \quad \square$$

Вариант 3

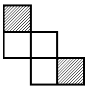
1. *В таблице 11 строк и 12 столбцов. В ней расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 1, а сумма чисел в каждой фигурке вида*  *равна 4 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы?*

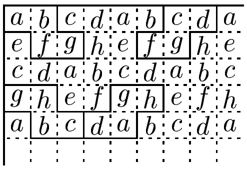
Ответ: 143.

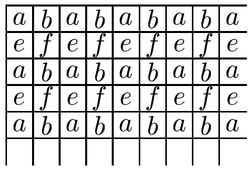




Решение 1. Наложим перевернутую фигурку на исходную так, чтобы они отличались одной клеткой, как показано на левом рисунке. Суммы чисел в этих фигурках одинаковы, поэтому в клетках, идущих по диагонали через клетку, стоят равные числа. Положим теперь две фигурки так, как на правом рисунке. Поскольку числа в закрашенных клетках одинаковы, сумма чисел в любом прямоугольнике 2×4 равна удвоенной сумме чисел фигурки, то есть 8. Всю таблицу за вычетом первой строки можно замостить пятнадцатью такими прямоугольниками. Тогда сумма чисел первой строки равна $1 - 15 \cdot 8 = -119$. Кроме того, две первые строки таблицы можно покрыть четырьмя прямоугольниками 2×4. Поэтому сумма чисел во второй строке равна $3 \cdot 8 - (-119) = 143$. $\square$







Решение 2. Наложим перевернутую фигурку на исходную так, чтобы они отличались одной клеткой, как показано на левом рисунке. Суммы чисел в этих фигурках одинаковы, поэтому в клетках, идущих по диагонали через клетку, стоят равные числа. Отметим теперь в таблице равные числа одинаковыми буквами. Рассмотрим две верхние фигурки на среднем рисунке. Поскольку сумма чисел в каждой из них равна 4, имеем

$$a + b + f + g = 4 = c + d + f + d.$$

Следовательно, $a + b = c + d$. Аналогично, рассматривая две нижние фигурки, мы получим $b + c = a + d$. Из двух установленных равенств следует, что $a = c$ и $b = d$. Аналогично показывается, что $e = g$ и $f = h$. Стало быть, числа в таблице расставлены так, как показано на правом рисунке. Тогда $a + b + e + f = 4$, и сумма чисел во всей таблице равна $36(a + b) + 30(e + f) = 1$. Следовательно,

$$a + b = -\tfrac{119}{6} \quad \text{и} \quad e + f = 4 - (a + b) = 4 + \tfrac{119}{6}.$$

Наконец, сумма чисел во второй строке равна $6(e + f) = 6\left(4 + \frac{119}{6}\right) = 143$. $\square$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ac$ больше abc в шесть раз. Найти минимальное значение выражения $(a + b)(b + c)(a + c)$.*

Ответ: 1.

Решение 1. По условию $ab + bc + ac = 6abc$. Положим $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$. Тогда

$$\frac{1}{4}(xy + yz + xz) = \frac{6}{8}xyz, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3.$$

Поэтому

$$(a + b)(b + c)(a + c) = \frac{x + y}{2} \cdot \frac{y + z}{2} \cdot \frac{x + z}{2} \geqslant \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{xz} = xyz \geqslant \left(\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}\right)^3 = 1.$$

Вначале мы трижды воспользовались неравенствами для средних арифметического и геометрического, затем — неравенством для средних геометрического и гармонического. Каждое из них обращается в равенство при $x = y = z = 1$. $\square$

Решение 2. Заметим, что по неравенству Коши о средних для двух чисел

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

С другой стороны, по неравенству Коши о средних для трех чисел

$$6abc = ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3(abc)^{2/3}.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{1}{2}$ и, значит,

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc \geqslant 1.$$

Осталось заметить, что числа $a = b = c = \frac{1}{2}$ удовлетворяют условию задачи и обращают все неравенства в равенства. $\square$

3. *На доске написано трехзначное восьмеричное число. Если его понимать как шестнадцатеричное число, то оно окажется в 3 раза больше исходного. Какое число написано на доске? Ответ дать в десятичной форме.*

Ответ: 124.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — восьмеричная запись искомого числа, где $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Тогда

$$16^2 a + 16b + c = 3\,(8^2 a + 8b + c), \quad \text{то есть } \ 32a = 4b + c.$$

Так как $b \leqslant 7$ и $c \leqslant 7$, правая часть этого равенства не превосходит 35. Поэтому

$$a = 1, \quad c = 32 - 4b = 4(8 - b).$$

Поскольку $c \,\vdots\, 4$, мы получаем $c = 0$ или $c = 4$, откуда соответственно $b = 8$ или $b = 7$. Первый случай невозможен, а второй дает ответ $174_8 = 124_{10}$. $\square$

4. *Сто журналистов выбирали лучшего футболиста года из 33 кандидатов. Каждый журналист называл тройку лучших футболистов, и они получали за это соответственно 3, 2 и 1 балл. В итоге победитель набрал абсолютно лучшую сумму баллов. Каково минимальное значение этой суммы?*

Ответ: 20.

Решение. Журналисты присудили в общей сложности 600 баллов. Так как $\frac{600}{33} \in (18, 19)$, победитель набрал не менее 19 баллов. Кроме того,

$$19 + 18 \cdot 32 = 595 < 600,$$

поэтому у победителя должно быть не менее 20 баллов. Покажем, как эта сумма может быть реализована.

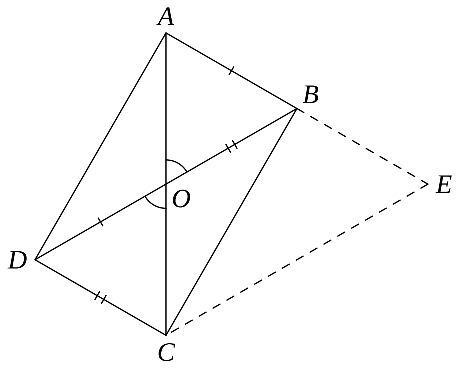
1) Разобьем футболистов на 11 групп по 3 человека. Пусть за каждую группу проголосовали по 9 журналистов, причем внутри группы по 3 раза выбираются варианты (a, b, c), (b, c, a) и (c, a, b), где a, b, c — футболисты группы. Тогда после голосования 99 журналистов все спортсмены получат по 18 баллов (по три первых, вторых и третьих мест).

2) Выберем по паре футболистов a, b и c, d из двух разных групп. В двух анкетах, где a и b занимают третьи места, заменим их соответственно на c и d. Тогда у a и b станет по 17 баллов, у c и d — по 19, а у остальных футболистов останется по 18 баллов.

3) Сотый журналист должен выбрать тройку (a, b, e), где $e \notin \{a, b, c, d\}$. После этого у a станет 20 баллов, у b, c, d, e — по 19, а у всех остальных — по 18. Таким образом, футболист a окажется единоличным победителем с 20 баллами. $\square$

5. *Диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 60^\circ$, $AB = DO$, $DC = BO$. Найти углы четырехугольника.*

Ответ: Все углы прямые.



Решение 1. Достроим треугольник BCD до параллелограмма $BECD$. Тогда

$$CE = BD = AC \quad \text{и} \quad \angle ACE = \angle AOB = 60^\circ,$$

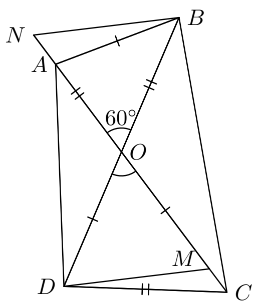
то есть треугольник ACE правильный. Так как

$$AB + BE = AB + DC = DO + OB = BD = CE = AE,$$

точка B лежит на отрезке AE. Тогда

$$\angle BAO = \angle EAC = 60^\circ \quad \text{и} \quad \angle ODC = \angle BEC = 60^\circ.$$

Поэтому треугольники ABO и ODC правильные и, значит, они одинаковы. Отсюда $OA = OB = OC$, и мы получаем $\angle ABC = 90^\circ$. Аналогичным образом проверяется, что и остальные углы $ABCD$ прямые. $\square$



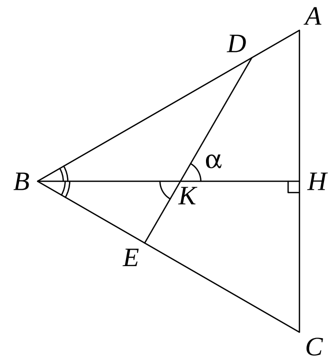
Решение 2. На луче OC отметим такую точку M, что $OM = OD$. Тогда треугольник DOM равносторонний, откуда $DM = OM = OD = AB$. На луче OA отметим такую точку N, что $ON = OB$. Тогда и треугольник BON равносторонний, поэтому $BN = ON = OB = CD$. Заметим далее, что

$$NA = NC - AC = NC - BD = NC - OB - OD = NC - OM - ON = CM.$$

Предположим, что точки N и A не совпадают. Тогда треугольники ABN и DMC равны по трем сторонам. В частности, $\angle OMD = 60^\circ = \angle ANB = \angle MCD$. Следовательно, точки M и C совпадают. Поэтому точки N и A также совпадают, что невозможно. Отсюда легко находятся углы четырехугольника $ABCD$. $\square$

6. *В основании треугольной пирамиды $ABCS$ объема $\sqrt{48}$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Проекция K вершины S на основание пирамиды лежит на высоте BH треугольника ABC, причем $BK : KH = 6 : 5$. Найти наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, содержащей SK и пересекающей отрезки AB и BC.*

Ответ: 21.



Решение. Пусть плоскость, содержащая SK, пересекает отрезки AB и BC в точках D и E соответственно. Положим $\alpha = \angle DKH$. Ввиду симметрии можно считать $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Кроме того,

$$\operatorname{ctg}\alpha \leqslant \frac{KH}{AH} = \frac{\frac{5}{11}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{11}, \quad \text{то есть} \quad \alpha \geqslant \operatorname{arcctg}\frac{5\sqrt{3}}{11}.$$

Воспользуемся теоремой синусов для треугольника BKD:

$$\frac{BK}{\sin\angle BDK} = \frac{DK}{\sin\angle DBK} \Leftrightarrow \frac{BK}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{DK}{\sin\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow DK = \frac{BK}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}$$

и для треугольника BKE:

$$\frac{BK}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right)} = \frac{KE}{\sin\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Отсюда

$$DE = DK + KE = \frac{BK}{2}\left(\frac{1}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}\right) = \frac{BK\left(\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) + \sin(\alpha - \frac{\pi}{6})\right)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{2BK\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} - \cos 2\alpha} = \frac{\frac{6}{11}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\sin\alpha}{2\sin^2\alpha - \frac{1}{2}} = \frac{9}{11}\left(2\sin\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha}\right)^{-1}.$$

Так как функция $t - \frac{1}{t}$ возрастает на $(0, +\infty)$, длина DE убывает при увеличении α в первой четверти. Поэтому максимум DE реализуется в случае $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$. Заметим, что

$$2\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{75}{121} + 1}} = \frac{11}{7},$$

откуда

$$DE = \frac{9}{11}\left(\frac{11}{7} - \frac{7}{11}\right)^{-1} = \frac{9}{11}\cdot\frac{77}{72} = \frac{7}{8}.$$

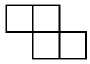
Кроме того,

$$SK = \frac{3V_{ABCS}}{S_{ABC}} = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{48} = 48.$$

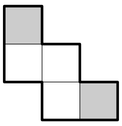
Тогда максимальная площадь сечения равна

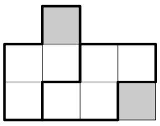
$$\frac{1}{2}\cdot DE\cdot SK = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot 48 = 21. \quad \square$$

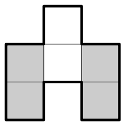
Вариант 4

1. *В таблице 14 строк и 15 столбцов. В ней расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 1, а сумма чисел в каждой фигурке вида*  *равна 3 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел в первом столбце таблицы?*

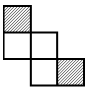
Ответ: -146.







Решение 1. Наложим перевернутую фигурку на исходную так, чтобы они отличались одной клеткой, как показано на левом рисунке. Суммы чисел в этих фигурках одинаковы, поэтому в клетках, идущих по диагонали через клетку, стоят равные числа. Положим теперь две фигурки так, как на среднем рисунке. Поскольку числа в закрашенных клетках одинаковы, сумма чисел в любом прямоугольнике 2×4 равна удвоенной сумме чисел фигурки, то есть 6. Кроме того, наложим фигурки так, как показано на правом рисунке. Мы получим равенство сумм чисел в прямоугольниках 2×1, идущих по горизонтали через клетку. Отсюда вытекает, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 равна 3. Всю таблицу за вычетом первого столбца можно разбить на 49 таких квадратов. Тогда сумма чисел в первом столбце равна $1 - 49 \cdot 3 = -146$. $\square$



a	b	c	d	a	b	c	d	a
e	f	g	h	e	f	g	h	e
c	d	a	b	c	d	a	b	c
g	h	e	f	g	h	e	f	h
a	b	c	d	a	b	c	d	a

a	b	a	b	a	b	a	b	a
e	f	e	f	e	f	e	f	e
a	b	a	b	a	b	a	b	a
e	f	e	f	e	f	e	f	e
a	b	a	b	a	b	a	b	a

Решение 2. Наложим перевернутую фигурку на исходную так, чтобы они отличались одной клеткой, как показано на левом рисунке. Суммы чисел в этих фигурках одинаковы, поэтому в клетках, идущих по диагонали через клетку, стоят равные числа. Отметим теперь в таблице равные числа одинаковыми буквами. Рассмотрим две верхние фигурки на среднем рисунке. Поскольку сумма чисел в каждой из них равна 3, имеем

$$a + b + f + g = 3 = c + d + f + d.$$

Следовательно, $a + b = c + d$. Аналогично, рассматривая две нижние фигурки, мы получим равенство $b + c = a + d$. Из двух установленных равенств следует, что $a = c$ и $b = d$. Аналогично показывается, что $e = g$ и $f = h$. Стало быть, числа в таблице расставлены так, как показано на правом рисунке. Тогда $a+b+e+f = 3$ и сумма чисел во всей таблице равна $56(a+e)+49(b+f) = 1$. Следовательно, $a+e = -\frac{146}{7}$. Таким образом, сумма чисел во втором столбце равна $7(a + e) = -146$. $\square$

2. *Сумма положительных чисел a, b, c в 27 раз больше их произведения. Найти наименьшее значение выражения $(a + b)(b + c)(a + c)$.*

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Решение 1. По условию $a + b + c = 27abc$. Положим $x = 3a$, $y = 3b$, $z = 3c$. Тогда

$$\frac{x + y + z}{3} = xyz, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 3.$$

Поэтому

$$(a + b)(b + c)(a + c) = \frac{(x + y)(y + z)(x + z)}{27} \geqslant \frac{8}{27}\sqrt{xy \cdot yz \cdot xz} \geqslant \frac{8}{27}\left(\frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}}\right)^{3/2} = \frac{8}{27}.$$

Вначале мы трижды воспользовались неравенствами для средних арифметического и геометрического, затем — неравенством для средних геометрического и гармонического. Каждое из них обращается в равенство при $x = y = z = 1$. $\square$

Решение 2. Заметим, что по неравенству Коши о средних для двух чисел

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

С другой стороны, по неравенству Коши о средних для трех чисел

$$9abc = \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Таким образом, $(abc)^{2/3} \geqslant \frac{1}{9}$ и, значит, $abc \geqslant \frac{1}{27}$. Поэтому

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc \geqslant \tfrac{8}{27}.$$

Осталось заметить, что числа $a = b = c = \frac{1}{3}$ удовлетворяют условию задачи и обращают все неравенства в равенства. $\square$

3. *На доске написано трехзначное восьмеричное число. Если записать его цифры в обратном порядке и понимать результат как шестнадцатеричное число, то оно окажется в 15 раз больше исходного. Какое число написано на доске? Ответ дать в десятичной форме.*

Ответ: 127.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — восьмеричная запись искомого числа, где $a, b, c \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Тогда

$$16^2c + 16b + a = 15\,(8^2a + 8b + c), \quad \text{откуда} \;\; 959a = -104b + 241c.$$

Так как $b \geqslant 0$ и $c \leqslant 7$, правая часть этого равенства не превосходит $241 \cdot 7 = 1687$. Поэтому

$$a = 1, \quad 241c = 959 + 104b.$$

Мы получаем, что c нечетно и $c \geqslant \frac{959}{241} > 3$, то есть $c = 5$ или $c = 7$. В первом случае b оказывается нецелым, а во втором $b = 7$, что дает ответ $177_8 = 127_{10}$. $\square$

4. *В выборах лучшего из 11 футболистов клуба приняло участие 2013 его болельщиков. Каждый болельщик называл тройку лучших футболистов, и они получали за это 3, 2 и 1 баллов соответственно. В итоге победитель набрал абсолютно лучшую сумму баллов. Каково минимальное значение этой суммы?*

Ответ: 1099.

Решение. Болельщики присудили в общей сложности 12 078 баллов. Так как $\frac{12\,078}{11} = 1098$, единоличный победитель набрал не менее 1099 баллов. Достаточно доказать, что все футболисты могли набрать поровну баллов. Действительно, в этом случае мы сможем вписать некоторого футболиста на третье место в любую из анкет, где он не был назван. Этот футболист и станет единоличным победителем с 1099 баллами.

Покажем, что все футболисты могли набрать поровну баллов. Разобьем футболистов на три группы: две по 4 человека и одну из 3 человек. Пусть по $4n$ болельщиков выбирали своих кандидатов только из первой и только из второй групп, а остальные $3n$ — только из третьей. Тогда $11n = 2013$, то есть $n = 183$. Внутри первой и второй групп должно быть по 183 варианта вида

$$(a, b, c), \;\; (b, c, d), \;\; (d, a, b) \;\; (c, d, a),$$

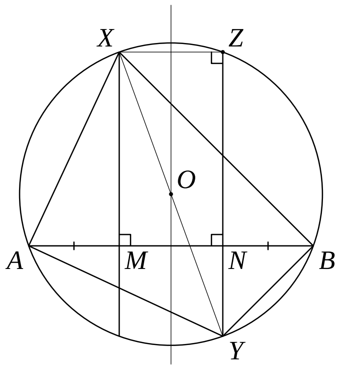
где a, b, c, d — футболисты группы. В итоге каждый из них получит $183 \cdot 6 = 1098$ баллов. Поклонники третьей группы должны выдать по 183 варианта вида

$$(a, b, c), \;\; (b, c, a), \;\; (c, a, b),$$

где a, b, c — футболисты группы. В итоге каждый из них также получит по $183 \cdot 6 = 1098$ баллов. $\square$

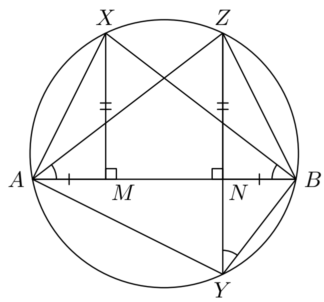
5. *Прямые, перпендикулярные отрезку AB, пересекают его в точках M и N, причем $AM = BN$. На этих прямых выбраны точки X и Y так, что сумма углов AXB и AYB равна $180°$. Найти сумму углов ABX и ABY.*

   Ответ: $90°$.



Решение 1. Выберем точки X и Y по разные стороны от AB. Так как $\angle AXB = 180° - \angle AYB$, четырехугольник $AXBY$ будет вписан в окружность с центром в точке O, лежащей на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку AB. Пусть точка Z симметрична X относительно ℓ. Поскольку $AM = BN$, прямая ℓ равноудалена от MX и NY. Тогда Z лежит на прямой NY. Кроме того, прямая ℓ будет для треугольника OXZ медианой и высотой. Поэтому $OX = OZ$, и точка Z лежит также на окружности. Так как $\angle XZY = 90°$, отрезок XY является диаметром окружности, откуда

$$\angle ABX + \angle ABY = \angle XBY = 90°. \quad \square$$



Решение 2. На прямой NY отметим точку Z, лежащую по другую сторону от прямой AB по сравнению с Y и такую, что $MX = NZ$. Тогда треугольники AMX и BNZ равны. Поэтому

$$\angle ZBA = \angle ZBN = \angle MAX = \angle BAX \quad \text{и} \quad AX = BZ.$$

Значит, равны и треугольники ABX и BAZ. Стало быть,

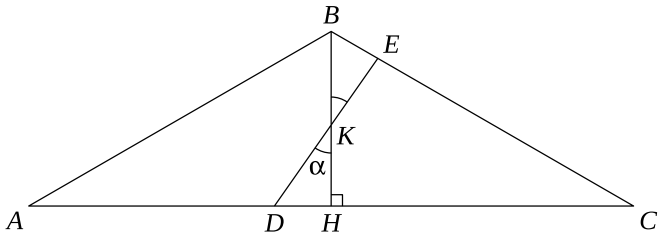
$$\angle AZB = \angle AXB = 180° - \angle AYB.$$

Следовательно, четырехугольник $AYBZ$ вписанный. Тогда

$$\angle ABX = \angle BAZ = \angle BYZ = \angle BYN = 90° - \angle ABY. \quad \square$$

6. *В основании треугольной пирамиды $ABCS$ объема $\sqrt{2}$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = 2$, $BC = 2$ и $\angle B = \frac{2\pi}{3}$. Проекция K вершины S на основание пирамиды лежит на высоте BH треугольника ABC, причем $HK : KB = \sqrt{3} : 2$. Найти наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, содержащей SK и пересекающей отрезки AC и BC.*

Ответ: $18\sqrt{3} - 30$.



Решение. Пусть плоскость, содержащая SK, пересекает отрезки AC и BC в точках D и E соответственно. Положим $\alpha = \angle DKH$. Тогда

$$AH = \sqrt{3}, \quad BH = 1, \quad HK = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right), \quad BK = \frac{2 \cdot HK}{\sqrt{3}} = 2\left(2 - \sqrt{3}\right).$$

Ясно, что $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{AH}{HK} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{то есть} \quad \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

По теореме синусов для треугольника BKE

$$\frac{BK}{\sin\angle BEK} = \frac{KE}{\sin\angle KBE} \Leftrightarrow \frac{BK}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)} = \frac{KE}{\sin\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow KE = \frac{BK\sqrt{3}}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Полагая $\lambda = \sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right)$, мы получим

$$DE = \frac{HK}{\cos\alpha} + KE = \lambda\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}\right) = \frac{\lambda\left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\alpha \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4\lambda\cos\frac{\pi}{12}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{6} + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)}{2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) - \frac{2 - \sqrt{3}}{2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)}\right)^{-1}.$$

Функция $t - \frac{2-\sqrt{3}}{t}$ возрастает на $(0, +\infty)$, поэтому длина DE минимальна при максимальном значении $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$, то есть при $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} < 2 + \sqrt{3}$, значение $\frac{\pi}{12}$ допустимо для угла α, и при нем

$$DE = \sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1} = 2\sqrt{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{6}\left(3\sqrt{3} - 5\right).$$

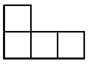
Кроме того,

$$SK = \frac{3V_{ABCS}}{S_{ABC}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6},$$

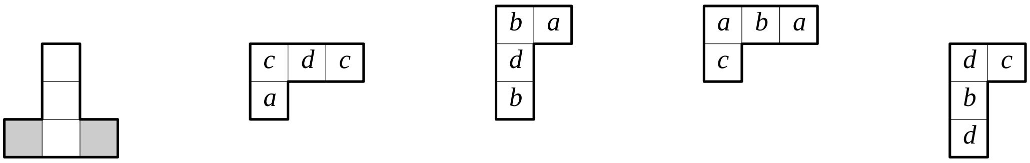
и минимальная площадь сечения равна

$$\tfrac{1}{2} \cdot DE \cdot SK = \sqrt{6}\left(3\sqrt{3} - 5\right) \cdot \sqrt{6} = 18\sqrt{3} - 30. \quad \square$$

Вариант 5

1. *В таблице* 11×11 *расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 1, а сумма чисел в каждой фигурке вида*  *равна 3 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое число стоит во второй слева клетке верхней строки таблицы?*

   Ответ: $\frac{181}{2}$.



Решение. Наложим перевернутую фигурку на исходную так, чтобы у них была общая “ножка”, как показано на левом рисунке. Суммы чисел в этих фигурках одинаковы, поэтому в клетках, идущих по горизонтали (или вертикали) с шагом 2, стоят равные числа. Значит, таблица имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} a & b & a & b & \dots \\ c & d & c & d & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ c & d & c & d & \dots \\ & & \dots & & \end{array}$$

где a, b, c, d — некоторые числа. Наложим на эту таблицу фигурки так, как на четырех правых рисунках. Приравнивая суммы в первой и второй, а также в третьей и четвертой фигурках, мы получим

$$a + 2c + d = a + 2b + d \qquad \text{и} \qquad 2a + b + c = b + c + 2d,$$

откуда $b = c$ и $a = d$. Выразим теперь суммы чисел во всей таблице и в одной из фигурок:

$$61a + 60b = 1, \qquad 2a + 2b = 3.$$

Из этой системы находим $b = \frac{181}{2}$. $\square$

2. *Сумма квадратов положительных чисел a, b и c в 6 раз больше их произведения. Найти наименьшее значение суммы этих чисел.*

   Ответ: $\frac{3}{2}$.

   Решение 1. Положим $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$. По условию

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = 3.$$

Поэтому

$$a + b + c = \frac{1}{2}(x + y + z) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{yz} + y + \frac{y}{xz} + z + \frac{z}{xy} - 3\right) \geqslant \frac{1}{2}(6 - 3) = \frac{3}{2}.$$

В предпоследнем переходе мы использовали неравенство Коши для средних арифметического и геометрического, которое обращается в равенство при $x = y = z = 1$. $\square$

Решение 2. По неравенству Коши для средних арифметического и геометрического

$$2abc = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = (abc)^{2/3}.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{1}{2}$ и, значит,

$$a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \geqslant \tfrac{3}{2}.$$

Осталось заметить, что числа $a = b = c = \frac{1}{2}$ удовлетворяют условию задачи и обращают все неравенства в равенства. $\square$

3. *На доске написано натуральное число. Несколько учеников по очереди выходят к доске, и каждый выполняет следующие действия: делает некоторую перестановку цифр последнего из написанных на доске чисел, добавляет к полученному числу 1 и пишет результат на доску. Может ли произведение всех чисел, написанных в итоге на доске, быть степенью 26?*

   Ответ: Нет.

   Решение. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_m$ — итоговые числа на доске, $n = x_0$, $N = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$. Заметим, что остаток от деления числа на 9 не меняется при перестановке его цифр. Тогда разность между x_{k+1} и $x_k + 1$ кратна 9, откуда

$$\big(N - n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m)\big) \ \vdots\ 9.$$

Предположим, что N есть степень 26. Так как $n(n+1)(n+2)$ кратно 3, а 26 не делится на 3, то $m = 1$. Но остатки от деления на 9 у чисел вида $n(n+1)$ принимают только значения $0, 2, 3, 6$, а у чисел вида 26^k — только значения 1 и 8. Поэтому $N \neq 26^k$ ни при каком $k \in \mathbb{N}$. $\square$

4. *Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2013\}$ можно выбрать так, чтобы любые два различных выбранных подмножества имели ровно 2011 общих элементов?*

   Ответ: 2013.

   Решение. Пусть $A = \{1, \ldots, 2013\}$. Ясно, что существует ровно 2013 различных подмножеств A, содержащих по 2012 элементов, причем пересечение любой пары таких подмножеств состоит из 2011 элементов. Поэтому ответ задачи не меньше, чем 2013. Докажем обратное неравенство. Предположим, что нашлись подмножества $A_1, \ldots, A_{2014}$, удовлетворяющие условию задачи. Тогда верны два утверждения.

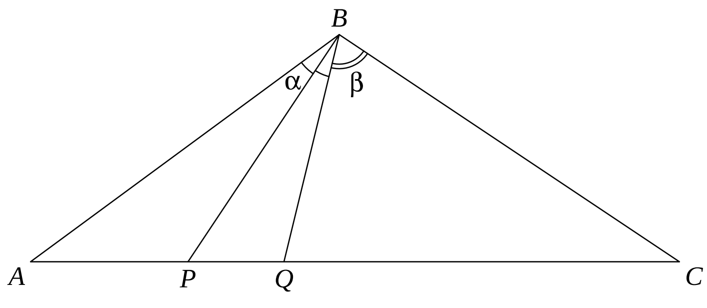
1) *Любое из множеств A_k содержит не более* 2012 *элементов.* В противном случае найдется множество A_n, совпадающее с A. Тогда остальные множества A_k содержатся в A_n. Поэтому все они состоят из 2011 элементов и, значит, совпадают друг с другом, что невозможно. Таким образом, каждое из множеств A_k содержит 2011 или 2012 элементов.

2) *Среди множеств A_k ровно одно состоит из* 2011 *элементов.* Действительно, хотя бы одно такое множество найдется, поскольку существует только 2013 подмножеств A из 2012 элементов. С другой стороны, любые два множества, состоящие из 2011 элементов, совпадают.

Из доказанных утверждений вытекает, что в выбранную систему входят все 2012-элементные подмножества A и некоторое 2011-элементное подмножество A (например, A_1). Но не все 2012-элементные подмножества A содержат A_1, что противоречит выбору множеств A_k. $\square$

5. *На стороне AC треугольника ABC отмечены различные точки P и Q. Известно, что $\angle ABP = \angle PBQ$ и $AC \cdot PQ = AP \cdot QC$. Найти $\angle PBC$.*

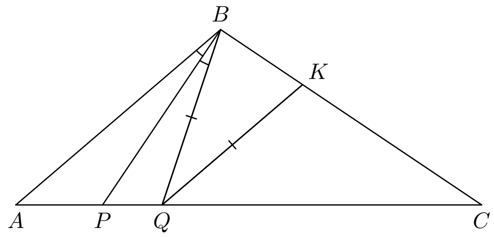
   Ответ: $90°$.



Решение 1. Положим $\alpha = \angle ABP$, $\beta = \angle CBQ$. Из соотношения для биссектрисы треугольника ABQ вытекает, что $\frac{AB}{BQ} = \frac{AP}{PQ}$. Из этого равенства и условия задачи

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{AC}{CQ} = \frac{S_{ABC}}{S_{CBQ}} = \frac{AB \cdot \sin(2\alpha + \beta)}{BQ \cdot \sin\beta} = \frac{AP \cdot \sin(2\alpha + \beta)}{PQ \cdot \sin\beta}.$$

Отсюда $\sin(2\alpha+\beta)=\sin\beta$. Так как угол α ненулевой и $2\alpha+\beta<180^\circ$, мы получаем $2\alpha+\beta=180^\circ-\beta$, то есть $\angle PBC=\alpha+\beta=90^\circ$. $\square$



Решение 2. Через точку Q проведем прямую, параллельную AB. Пусть она пересекает прямую BC в точке K. Тогда $\frac{AC}{QC}=\frac{BC}{KC}$. Кроме того, из условия следует, что $\frac{AC}{QC}=\frac{AP}{PQ}$, а из свойств биссектрисы в треугольнике ABQ вытекает, что $\frac{AP}{PQ}=\frac{AB}{BQ}$. Поэтому

$$\frac{BC}{KC}=\frac{AC}{QC}=\frac{AP}{PQ}=\frac{AB}{BQ}.$$

С другой стороны, из подобия треугольников ABC и QKC мы получаем $\frac{BC}{KC}=\frac{AB}{QK}$. Поэтому $QK=BQ$, и треугольник BQK равнобедренный, откуда $\angle QBK=\angle BKQ$. Кроме того, из параллельности прямых AB и QK следует, что $\angle BQK=\angle ABQ=2\angle PBQ$. Таким образом,

$$2\angle PBQ+2\angle QBK=\angle BQK+\angle QBK+\angle BKQ=180^\circ.$$

Стало быть, $\angle PBC=\angle PBQ+\angle QBK=90^\circ$. $\square$

6. *Пространственное тело состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству*

$$\left[2^{y^2+z^2}\right]+|x|<17$$

(здесь $[a]$ означает целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a). Найти объем тела.

Ответ: $2\pi\log_2 17!$.

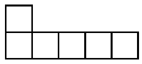
Решение. Так как $y^2+z^2<\log_2 17$, тело является объединением непересекающихся множеств

$$E_k=\left\{(x,y,z)\colon\ |x|<17-k,\ \ y^2+z^2\in\left[\log_2 k,\log_2(k+1)\right)\right\}\quad (k=1,\ldots,16).$$

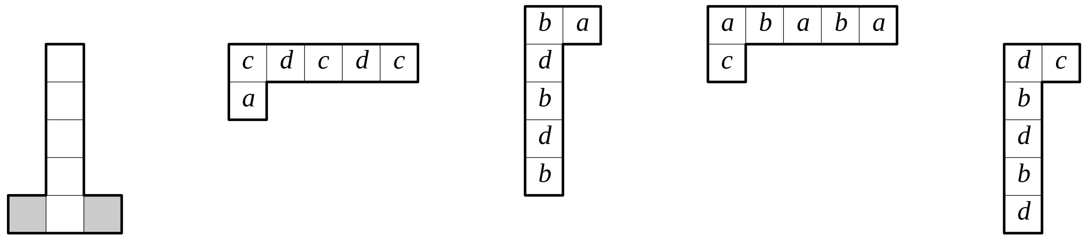
Каждое из E_k представляет собой цилиндрическую трубу длиной $2(17-k)$, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно $\sqrt{\log_2 k}$ и $\sqrt{\log_2(k+1)}$. Поэтому искомый объем равен

$$\sum_{k=1}^{16}V\left(E_k\right)=2\pi\sum_{k=1}^{16}(17-k)(\log_2(k+1)-\log_2 k)=$$
$$=2\pi\left(\sum_{k=2}^{17}(18-k)\log_2 k-\sum_{k=1}^{16}(17-k)\log_2 k\right)=2\pi\sum_{k=1}^{17}\log_2 k=2\pi\log_2 17!\,.\quad\square$$

Вариант 6

1. *В таблице* 11×11 *расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 1, а сумма чисел в каждой фигурке вида*  *равна 2 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое число стоит в левом верхнем углу таблицы?*

   Ответ: -39.



Решение. Наложим перевернутую фигурку на исходную так, чтобы у них была общая “ножка”, как показано на левом рисунке. Суммы чисел в этих фигурках одинаковы, поэтому в клетках, идущих по горизонтали (или вертикали) с шагом 2, стоят равные числа. Значит, таблица имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & a & b & a & b & \dots \\ c & d & c & d & c & d & \dots \\ a & b & a & b & a & b & \dots \\ c & d & c & d & c & d & \dots \\ a & b & a & b & a & b & \dots \\ c & d & c & d & c & d & \dots \\ & & & \dots & & & \end{array}$$

где a, b, c, d — некоторые числа. Наложим на эту таблицу фигурки так, как на четырех правых рисунках. Приравнивая суммы в первой и второй, а также в третьей и четвертой фигурках, мы получим

$$a + 3c + 2d = a + 3b + 2d \qquad \text{и} \qquad 3a + 2b + c = 2b + c + 3d,$$

откуда $b = c$ и $a = d$. Выразим теперь суммы чисел во всей таблице и в одной из фигурок:

$$61a + 60b = 1, \qquad 3a + 3b = 2.$$

Из этой системы находим $a = -39$. $\square$

2. *Сумма квадратов положительных чисел* a, b *и* c *в 9 раз больше их произведения. Найти наименьшее значение выражения* $ab + bc + ca$.

   Ответ: $\frac{1}{3}$.

   Решение 1. Положим $x = 3a$, $y = 3b$, $z = 3c$. По условию

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3abc} = 3.$$

По неравенству Коши для средних арифметического и геометрического

$$1 = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}},$$

откуда $xyz \geqslant 1$. Применяя неравенство Коши еще раз, мы получим

$$ab + ac + bc = \frac{(xy + xz + yz)}{9} = \frac{xyz}{9} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{xyz}{3\sqrt[3]{xyz}} = \frac{(xyz)^{2/3}}{3} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Осталось заметить, что все неравенства обращаются в равенства при $x = y = z = 1$. $\square$

Решение 2. По неравенству Коши для средних арифметического и геометрического

$$3abc = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = (abc)^{2/3}.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{1}{3}$ и, значит,

$$ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3(abc)^{2/3} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Осталось заметить, что числа $a = b = c = \frac{1}{3}$ удовлетворяют условию задачи и обращают все неравенства в равенства. $\square$

3. *На доске написано натуральное число. Несколько учеников по очереди выходят к доске, и каждый выполняет следующие действия: добавляет к последнему из написанных на доске чисел свой порядковый номер, заменяет каждую цифру d результата на $9-d$ и пишет полученное число на доску. Может ли произведение всех написанных в итоге на доске чисел быть степенью 17?*

Ответ: Нет.

Решение. Назовем *негативом* числа результат замены каждой его цифры d на $9-d$. Пусть $x_0, \ldots, x_m$ — итоговые числа на доске, $n = x_0$, $N = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$. Заметим, что любое натуральное число дает такой же остаток от деления на 9, как сумма его цифр. Поэтому сумма числа и его негатива кратна 9, откуда $(x_k + x_{k-1} + k) \,\vdots\, 9$ при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$. В частности,

$$\big(x_0 \cdot x_1 - n(-n-1)\big) \,\vdots\, 9, \quad \big(x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 - n(-n-1)(n-1)\big) \,\vdots\, 9.$$

Поскольку $n(-n-1)(n-1) = -(n-1)n(n+1) \,\vdots\, 3$, мы получаем $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \,\vdots\, 3$. Тогда если N есть степень 17, то $m = 1$. Но остатки от деления на 9 у чисел вида $-n(n+1)$ принимают только значения $0, 3, 6, 7$, а у чисел вида 17^k — только значения 1 и 8. Поэтому $N \neq 17^k$ ни при каком $k \in \mathbb{N}$. $\square$

4. *Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2013\}$ можно выбрать так, чтобы объединение любых двух различных выбранных подмножеств имело ровно 3 элемента?*

Ответ: 2012.

Решение. Ясно, что максимальное количество искомых подмножеств не меньше 2012, поскольку множества $\{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{1,2013\}$ обладают необходимыми свойствами. Докажем обратное неравенство. Пусть нашлась система из 2013 множеств, удовлетворяющая условию задачи. Тогда справедливы два утверждения.

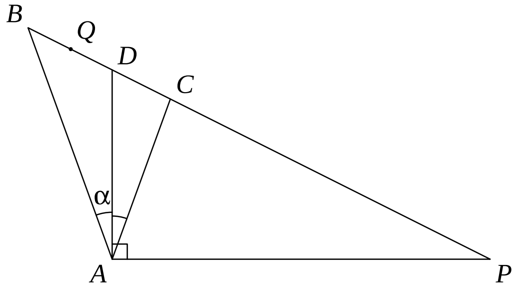
1) *Система содержит только двухэлементные множества и не более одного одноэлементного.* Действительно, если в систему входит трехэлементное множество, то оно содержит все остальные 2012 подмножеств, что невозможно. Двух одноэлементных множеств быть не может, поскольку их объединение содержало бы не более двух элементов.

2) *Существует элемент, общий для всех двухэлементных множеств системы.* Действительно, пусть множества $A = \{a, b\}$ и $B = \{a, c\}$ входят в систему. Покажем, что все двухэлементные множества системы содержат a. Пусть в систему входит множество $C = \{d, e\}$, где d отлично от a, b, c (заметим, что такое обязательно есть). Тогда $e = a$, иначе $A \cup C$ или $B \cup C$ содержит 4 элемента. Множество $\{b, c\}$ в систему входить не может, поскольку тогда $\{b, c\} \cup C$ содержало бы 4 элемента.

Из доказанных утверждений вытекает, что система состоит из 2012 двухэлементных множеств, объединение которых равно $\{1, \ldots, 2013\}$, и одного одноэлементного множества. Но тогда одноэлементное множество содержится в одном из двухэлементных, что невозможно. $\square$

5. *Дан треугольник ABC. Прямая BC пересекается с биссектрисой внешнего угла A в точке P. На стороне BC выбрана такая точка Q, что $PC \cdot QB = PB \cdot QC$. Найти $\angle PAQ$.*

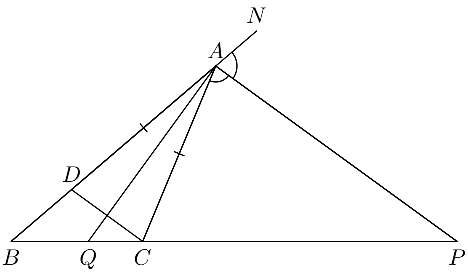
Ответ: $90°$.



Решение 1. Отрезок AP перпендикулярен биссектрисе AD треугольника ABC. Положим $\alpha = \angle BAD$. Из соотношения для биссектрисы треугольника ABC вытекает, что $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$. Тогда по условию задачи

$$\frac{QC}{QB} = \frac{PC}{PB} = \frac{S_{ACP}}{S_{ABP}} = \frac{AC \cdot \sin(\alpha - 90°)}{AB \cdot \sin(\alpha + 90°)} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}.$$

Таким образом, точки Q и D делят отрезок BC в одном и том же отношении и потому совпадают. Отсюда $\angle PAQ = \angle PAD = 90°$. $\square$



Решение 2. Отметим на луче BA за точкой A точку N. Через точку C проведем прямую, параллельную AP. Пусть она пересекает прямую AB в точке D. Тогда по теореме Фалеса $\frac{AD}{AB} = \frac{PC}{PB}$. С другой стороны, углы $\angle DCA$ и $\angle CAP$ равны как накрест лежащие, а углы $\angle CDA$ и $\angle PAN$ — как соответственные. Таким образом,

$$\angle DCA = \angle CAP = \angle PAN = \angle CDA.$$

Значит, треугольник CAD равнобедренный, откуда $AC = AD$. Из условия задачи следует, что $\frac{QC}{QB} = \frac{PC}{PB}$. Поэтому

$$\frac{QC}{QB} = \frac{PC}{PB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB}.$$

Следовательно, точка Q — основание биссектрисы угла $\angle BAC$. Таким образом, угол $\angle PAQ$ — угол между биссектрисами внешнего и внутреннего углов треугольника, и, значит, он равен $90°$. $\square$

6. *Пространственное тело состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству*

$$\left[\log_2(x^2+y^2+1)\right] + |z| < 62$$

(здесь $[a]$ означает целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a). Найти объем тела.

Ответ: $128\,(2^{57}-1)\pi$.

Решение: Так как $x^2+y^2 < 2^{62}-1$, тело является объединением непересекающихся множеств

$$E_k = \left\{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2 \in \left[2^k-1, 2^{k+1}-1\right),\ \ |z| < 62-k\right\} \quad (k=0,\dots,61).$$

Каждое из E_k представляет собой цилиндрическую трубу длиной $2(62-k)$, внутренний и внешний радиусы которой равны соответственно $\sqrt{2^k-1}$ и $\sqrt{2^{k+1}-1}$. Поэтому искомый объем равен

$$\sum_{k=0}^{61} V\left(E_k\right) = 2\pi \sum_{k=0}^{61}(62-k)\left(2^{k+1}-2^k\right) =$$

$$= 2\pi\left(\sum_{k=1}^{62}(63-k)2^k - \sum_{k=0}^{61}(62-k)2^k\right) = 2\pi\left(\sum_{k=0}^{62}2^k - 63\right) = 128\,(2^{57}-1)\pi. \quad \square$$