САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания отборочного и заключительного этапов
2015/2016 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

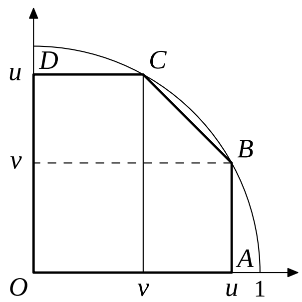
Вариант 1

1. *При каком наименьшем k можно отметить k клеток доски 10×11 так, что при любом размещении на доске трехклеточного уголка он задевает хотя бы одну отмеченную клетку?*

Ответ: 50.

Решение. Несложно заметить, что в любом квадрате 2×2 есть хотя бы две отмеченные клетки. Поскольку из доски 10×11 можно вырезать 25 таких квадратов, в ней должно быть не менее 50 отмеченных клеток. Пример с 50 отмеченными клетками получается, если отметить клетки, первая координата которых четна. $\square$

2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leqslant 1$. Докажите неравенство $x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 \leqslant \frac{\pi}{2}$.*



Решение 1. В силу четности достаточно рассмотреть неотрицательные x и y. Можно также считать, что $x \geqslant y$, иначе переставим x и y, увеличив левую часть неравенства. Из условия вытекает, что $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$. Положим $u = x^6$, $v = y^6$ и рассмотрим пятиугольник $OABCD$ с вершинами в точках

$$O = (0,0),\ A = (u,0),\ B = (u,v),\ C = (v,u),\ D = (0,u)$$

(см. рисунок). Так как $u \leqslant 1$ и

$$u^2 + v^2 = x^{12} + y^{12} \leqslant x^8 + y^8 \leqslant 1,$$

пятиугольник содержится в четверти единичного круга с центром в O, лежащей в первом квадранте. Поэтому

$$\tfrac{\pi}{2} \geqslant 2S_{OABCD} = (u+v)(u-v) + 2uv = u^2 - v^2 + 2uv = x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6. \quad \square$$

Решение 2. В силу четности достаточно рассмотреть неотрицательные x и y. Положим

$$x = r\sqrt[6]{\cos t},\ y = r\sqrt[6]{\sin t}, \quad \text{где } r \geqslant 0,\ t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

По условию

$$1 \geqslant x^8 + y^8 = r^8\left(\cos^{\frac{4}{3}} t + \sin^{\frac{4}{3}} t\right) \geqslant r^8\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r^8,$$

откуда $r \leqslant 1$. Поэтому

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 = r^{12}\left(\cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t\cos t\right) \leqslant \cos 2t + \sin 2t = \sqrt{2}\sin\left(2t + \tfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2} < \tfrac{\pi}{2}. \quad \square$$

Решение 3. Положим $u = x^6$ и $v = y^6$. Тогда

$$u^2 + v^2 = x^{12} + y^{12} \leqslant x^8 + y^8 \leqslant 1.$$

В силу неравенства Коши

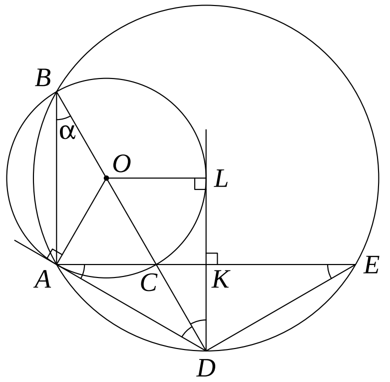
$$2uv = 2(\sqrt{2}-1)u \cdot (\sqrt{2}+1)v \leqslant (\sqrt{2}-1)u^2 + (\sqrt{2}+1)v^2.$$

Поэтому

$$u^2 - v^2 + 2uv \leqslant \sqrt{2}\,(u^2+v^2) \leqslant \sqrt{2} < \tfrac{\pi}{2}. \quad \square$$

3. *Дан прямоугольный треугольник ABC. На продолжении гипотенузы BC выбрана точка D так, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Оказалось, что биссектриса $\angle ADE$ касается окружности ω. В каком отношении точка C делит отрезок AE?*

Ответ: $AC : CE = 1 : 2$.



Решение. Пусть $\alpha = \angle ABD$, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно. Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \alpha$. Кроме того, вписанные углы AED и α опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED = \alpha$ и треугольник ADE равнобедренный. Поэтому биссектриса DK является также его медианой и высотой. Значит, $AB \parallel DL$, поскольку прямые AB и DL перпендикулярны AE. Прямоугольные треугольники AOD и LOD равны по катету и гипотенузе, откуда $\angle ADO = \angle LDO = \angle ABD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ADK мы получаем, что $3\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Тогда $AD = 2DK$, и по свойству биссектрисы

$$\frac{CK}{AC} = \frac{DK}{AD} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$CE = EK + CK = AK + CK = AC + 2CK = 2AC. \quad \square$$

4. *На складе хранится 400 тонн грузов, причем вес каждого из них кратен центнеру и не превосходит 10 тонн. Известно, что любые два груза имеют разный вес. Какое наименьшее количество рейсов надо сделать на 10-тонном автомобиле, чтобы гарантированно перевезти эти грузы со склада?*

Ответ: 51.

Решение. Покажем, что за 51 рейс перевезти грузы можно всегда, даже если бы на складе были представлены все веса от 1 до 100 центнеров. Действительно, разобьем все грузы, кроме 50- и 100-центнерных, на 49 пар следующим образом:

$$(1,99), \quad (2,98), \quad (3,97), \quad \ldots, \quad (49,51).$$

Для их перевозки достаточно 49 рейсов, поскольку каждая пара помещается в автомобиль. Еще два рейса необходимо для перевозки грузов в 50 и 100 центнеров.

Покажем теперь, что за 50 рейсов перевести грузы можно не всегда. Пусть на складе хранятся грузы в 31 и $47, 48, \ldots, 100$ центнеров. Их суммарный вес равен $31 + \frac{54\cdot(47+100)}{2} = 4000$ центнеров. Никакие два груза весом от 50 до 100 тонн не могут быть перевезены вместе на одном автомобиле. Но таких грузов 51, поэтому потребуется не менее 51 рейса. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 2^n - 32$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 7. Найдите x.*

   Ответ: 2016 или 16352.

   Решение. Запишем x в виде $32 \cdot N$, где $N = 2^{n-5} - 1$. Один простой делитель x равен 2. Поэтому мы должны найти все N, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 7. Остатки от деления степеней двойки на 7 равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость N на 7 означает, что $n-5$ кратно 3, то есть $N = 2^{3m} - 1$. Если $m = 1$, то $N = 7$, что нам не подходит. При $m = 2$ и $m = 3$ мы получим соответственно $N = 7 \cdot 3^2$ и $N = 7 \cdot 73$, откуда $x = 2016$ и $x = 16352$. Покажем, что при $m > 3$ решений не будет. Рассмотрим два случая.

1) *m нечетно.* Тогда
$$N = p \cdot q, \quad \text{где } p = 2^m - 1, \ \ q = 2^{2m} + 2^m + 1.$$
Заметим, что p и q взаимно просты, поскольку
$$3 = q - (2^{2m} - 1) - (2^m - 1) = q - p\,(2^m + 2)$$
и общим делителем p и q может быть только 3. Но p не кратно 3 при нечетном m.

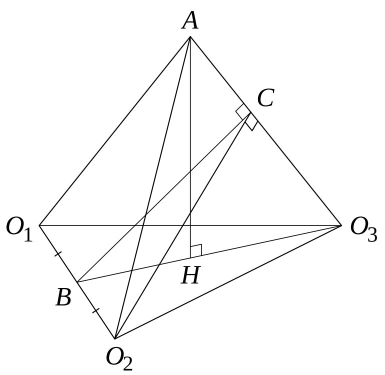
Одно из чисел p и q делится на 7. Если $p \,\vdots\, 7$, то $m \,\vdots\, 3$ и, повторяя предыдущие рассуждения для p вместо N, мы разложим p в произведение двух взаимно простых чисел, отличных от 1. Тогда N есть произведение трех взаимно простых чисел и, тем самым, имеет не менее трех различных простых делителей, что невозможно.

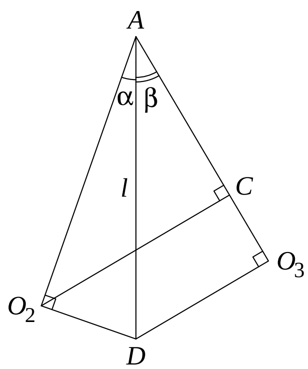
Пусть теперь $q \,\vdots\, 7$. Так как число q взаимно просто с p, оно не может иметь других простых делителей, откуда $q = 7^s$ при некотором натуральном s. Остаток от деления на 8 у 7^s такой же, как у $2^{2m} + 2^m + 1$, то есть 1, поскольку $m > 3$. Тогда s четно и q является точным квадратом. Но число $2^{2m} + 2^m + 1$ лежит строго между $\left(2^m\right)^2$ и $\left(2^m + 1\right)^2$ и потому точным квадратом быть не может.

2) *m четно.* Тогда $m = 2k$ при $k > 1$, и
$$N = p \cdot q, \quad \text{где } p = 2^{3k} - 1, \ \ q = 2^{3k} + 1.$$
Числа p и q взаимно просты, так как они нечетны и $q - p = 2$. Заметим, что число p раскладывается на два взаимно простых множителя. Действительно, при четном k запишем p как разность квадратов, а при нечетном воспользуемся разложением из 1). Значит, N есть произведение трех взаимно простых чисел, отличных от 1. Поэтому N имеет не менее трех различных простых делителей, что невозможно. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A и образующей $\sqrt{8}$ касаются друг друга внешним образом. У двух конусов угол между образующей и осью симметрии равен $\frac{\pi}{6}$, а у третьего он равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, где O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов.*

   Ответ: $\sqrt{\sqrt{3}+1}$.





Решение. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $l = \sqrt{8}$, B — середина отрезка O_1O_2, AD — общая образующая второго и третьего конусов. Тогда

$$AO_1 = AO_2 = l\cos\alpha, \quad AO_3 = l\cos\beta = l\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Четырехугольник AO_2DO_3 вписан в окружность с диаметром AD, откуда по теореме синусов

$$O_1O_3 = O_2O_3 = AD\cdot\sin\angle O_2AO_3 = l\sin(\alpha+\beta).$$

Аналогичным образом

$$O_1O_2 = l\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad BO_2 = l\sin\alpha\cos\alpha = l\,\tfrac{\sqrt{3}}{4}.$$

Опустим перпендикуляр BC на прямую AO_3. Заметим, что отрезки AB и O_3B перпендикулярны O_1O_2 как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1O_2 перпендикулярен плоскости ABO_3 и, значит, прямой AO_3. Поэтому ребро AO_3 перпендикулярно плоскости O_1O_2C и, в частности, отрезку CO_2. Поэтому

$$CO_2 = AO_2\cdot\sin\angle O_2AC = l\cos\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

По теореме Пифагора мы получаем

$$BC = \sqrt{CO_2^2 - BO_2^2} = l\cos\alpha\sqrt{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha} = l\cos\alpha\sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\beta)}{2}} = \frac{l\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}+1}}{4}.$$

Пусть V — объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, AH — ее высота. Тогда

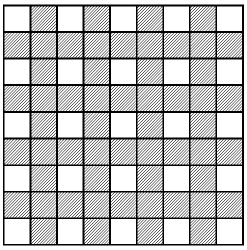
$$V = \tfrac{1}{6}\cdot O_1O_2\cdot BO_3\cdot AH = \tfrac{1}{3}\cdot O_1O_2\cdot S_{ABO_3} = \tfrac{1}{3}\cdot BO_2\cdot AO_3\cdot BC = \\ = \frac{l^3}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1} = \frac{l^3}{16\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1} = \sqrt{\sqrt{3}+1}. \quad \square$$

Вариант 2

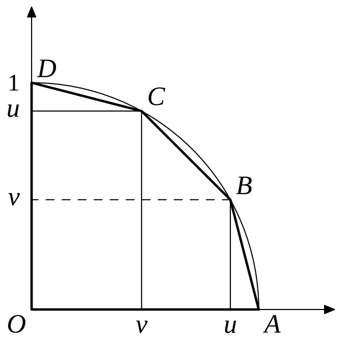
1. *При каком наименьшем k можно отметить k клеток доски 9×9 так, что при любом размещении на доске трехклеточного уголка он задевает хотя бы две отмеченные клетки?*

Ответ: 56.

Решение. Несложно заметить, что в любом квадрате 2×2 должно быть отмечено не менее трех клеток, а в каждом прямоугольнике 1×2 — не менее двух. Поскольку из доски 9×9 можно вырезать 16 квадратов 2×2 и 8 прямоугольников 1×2, всего должно быть отмечено по крайней мере $16 \cdot 3 + 8 = 56$ клеток. Пример с 56 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^4 + y^4 \leqslant 1$. Докажите неравенство $x^6 - y^6 + 2y^3 < \frac{\pi}{2}$.*



Решение 1. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x \geqslant y \geqslant 0$. Положим $u = x^3$, $v = y^3$ и рассмотрим пятиугольник $OABCD$ с вершинами в точках

$$O = (0,0),\ A = (1,0),\ B = (u,v),\ C = (v,u),\ D = (0,1)$$

(см. рисунок). Так как $v \leqslant u \leqslant 1$ и

$$u^2 + v^2 \leqslant u^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{4}{3}} = x^4 + y^4 \leqslant 1,$$

пятиугольник содержится в четверти единичного круга с центром в O, лежащей в первом квадранте. Поэтому

$$\tfrac{\pi}{2} \geqslant 2S_{OABCD} = (u+v)(u-v) + 2uv + 2v(1-u) = u^2 - v^2 + 2v = x^6 - y^6 + 2y^3. \quad \square$$

Решение 2. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x \geqslant y \geqslant 0$. Положим $u = x^3$, $v = y^3$. Тогда $v \leqslant u \leqslant 1$ и

$$u^2 + v^2 \leqslant u^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{4}{3}} = x^4 + y^4 \leqslant 1.$$

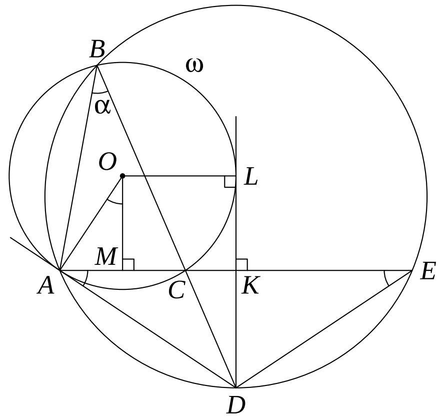
Отсюда

$$u^2 - v^2 + 2v \leqslant 1 + 2v - 2v^2 \leqslant \tfrac{3}{2} < \tfrac{\pi}{2}\,,$$

поскольку наибольшее значение трехчлена $1 + 2v - 2v^2$ достигается при $v = \frac{1}{2}$. $\square$

3. *На продолжении стороны BC треугольника ABC взята точка D так, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, причем $AC : CE = 1 : 2$. Оказалось, что биссектриса угла ADE касается окружности ω. Найдите углы треугольника ABC.*

Ответ: $30°, 60°, 90°$.



Решение 1. Пусть M — середина стороны AC, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно. Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \angle ABD$. Кроме того, вписанные углы ABD и AED опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED$, то есть треугольник ADE — равнобедренный. Поэтому биссектриса DK треугольника ADE является также его медианой и высотой. В частности, $DK \perp AE$, откуда $OL \parallel AE$. Тогда

$$AO = OL = MK = 2AM, \quad \text{откуда } \angle ABC = \angle AOM = 30°.$$

Значит, $\angle ADK = 60°$, и равнобедренный треугольник ADL оказывается равносторонним. Поэтому

$$\angle LBC = \angle LAC = \angle LAD - \angle KAD = 30° = \angle ABC,$$

то есть BD — биссектриса угла $\angle ABL$. Таким образом, C является серединой дуги AL, откуда DB — биссектриса угла $\angle ADL$. Значит, $\angle KDB = 30°$. Тогда $\angle ACB = 60°$, а оставшийся угол в треугольнике равен $90°$. $\square$

Решение 2. Пусть $\alpha = \angle ABC$, r — радиус ω, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно. Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \angle ABD$. Кроме того, вписанные углы ABD и AED опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED$, то есть треугольник ADE — равнобедренный. Поэтому биссектриса DK треугольника ADE является также его медианой и высотой. В частности, $DK \perp AE$, откуда $OL \parallel AE$. Тогда

$$r\sin\alpha + r = AK = KE = \tfrac{1}{2}AE = \tfrac{3}{2}AC = 3r\sin\alpha, \quad \text{откуда } \sin\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Заметим, что $\alpha < \angle ABL = \frac{1}{2}\angle AOL < \frac{\pi}{2}$, поскольку четырехугольник $DAOL$ вписанный. Поэтому $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Кроме того,

$$CK = AK - AC = AK - \tfrac{2}{3}AK = \tfrac{1}{3}KE,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\angle ACB = \operatorname{tg}\angle DCK = \frac{DK}{CK} = 3\cdot\frac{DK}{KE} = 3\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}.$$

Поэтому $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ и $\angle BAC = \pi - \alpha - \angle ACB = \frac{\pi}{2}$. $\square$

4. *В кинотеатр пришло 50 зрителей, суммарный возраст которых равен 1555 лет, причем среди них нет одногодков. Для какого наибольшего k можно гарантированно выбрать 16 зрителей, суммарный возраст которых не меньше k лет?*

Ответ: 776.

Решение. Покажем, что $k \geqslant 776$, то есть суммарный возраст 16 самых старших зрителей всегда не меньше 776. Расположим зрителей в порядке увеличения возраста, и пусть a_i — число лет i-му из них. Поскольку среди зрителей нет одногодков, мы получим

$$a_1 \leqslant a_2 - 1 \leqslant a_3 - 2 \leqslant \ldots \leqslant a_{50} - 49,$$

то есть числа $b_i = a_i - (i-1)$ возрастают. Кроме того,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{50} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{50} - (0 + 1 + 2 + \ldots + 49) = 1555 - \frac{49 \cdot 50}{2} = 330,$$

откуда среднее арифметическое чисел b_k равно $\frac{330}{50} = 6,6$. В силу возрастания чисел b_i найдется такой индекс m, что $b_i \leqslant 6$ при $i \leqslant m$ и $b_i \geqslant 7$ при $i > m$. Если $m \leqslant 34$, то

$$b_{35} + b_{36} + \ldots + b_{50} \geqslant 16 \cdot 7 = 112,$$

а при $m > 34$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{34} \leqslant 34 \cdot 6 = 204 \quad \text{и} \quad b_{35} + b_{36} + \ldots + b_{50} \geqslant 330 - 204 = 126 > 112.$$

В обоих случаях

$$a_{35} + a_{36} + \ldots + a_{50} = b_{35} + b_{36} + \ldots + b_{50} + (34 + 35 + \ldots + 49) \geqslant 112 + \frac{16 \cdot (34 + 49)}{2} = 776.$$

Покажем теперь, что $k \leqslant 776$. Мы должны привести пример, когда суммарный возраст 16 самых старших зрителей равен 776. Пусть в кинотеатр пришли люди, которым $6, 7, \ldots, 25$ и $27, 28, \ldots, 56$ лет. Их суммарный возраст равен $\frac{51 \cdot (6+56)}{2} - 26 = 1555$, а суммарный возраст 16 самых старших из них равен $41 + 42 + \ldots + 56 = \frac{16 \cdot (41+56)}{2} = 776$. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 2^n - 32$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 3. Найдите x.*

Ответ: 480 или 2016.

Решение. Запишем x в виде $32 \cdot N$, где $N = 2^{n-5} - 1$. Один простой делитель x равен 2. Поэтому мы должны найти все N, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 3. Делимость N на 3 означает, что $n - 5$ четно, то есть $N = 2^{2m} - 1$. Если $m = 1$, то $N = 3$, что нам не подходит. При $m = 2$ и $m = 3$ мы получим соответственно $N = 3 \cdot 5$ и $N = 3^2 \cdot 7$, откуда $x = 480$ и $x = 2016$. Покажем, что при $m > 3$ решений не будет. Заметим, что

$$N = p \cdot q, \quad \text{где } \ p = 2^m - 1, \ \ q = 2^m + 1.$$

Числа p и q взаимно просты, так как они нечетны и $q - p = 2$. Одно их них кратно 3. Если $p \,\vdots\, 3$, то m четно, и мы можем разложить p в произведение двух взаимно простых чисел, отличных от 1, тем же способом, что и N. Тогда N есть произведение трех взаимно простых чисел и, тем самым, имеет не менее трех различных простых делителей, что невозможно.

Пусть теперь $q \,\vdots\, 3$. Так как число q взаимно просто с p, оно не может иметь других простых делителей. Отсюда $q = 3^s$ и $2^m + 1 = 3^s$ при некотором натуральном s. Рассмотрим два случая.

1) *s четно.* Тогда $s = 2k$, причем $k > 1$, так как $m > 3$. Поэтому

$$2^m = (3^k - 1)(3^k + 1).$$

В правой части равенства стоит произведение соседних четных чисел, бóльших 4. Но одно из них не делится на 4 и потому не является степенью двойки, что невозможно.

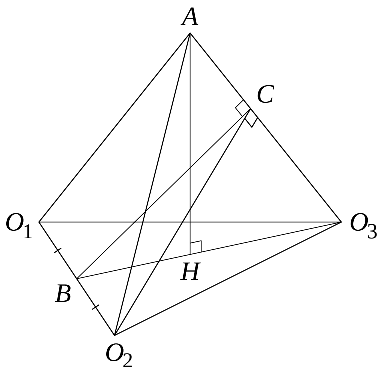
2) *s нечетно.* Тогда $s = 2k + 1$ при некотором натуральном k, и

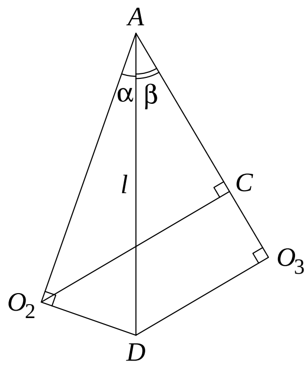
$$2^m - 2 = 3^{2k+1} - 3 = 3\,(3^k - 1)(3^k + 1).$$

Правая часть этого равенства кратна 4, так как содержит два четных множителя, а левая часть при $m > 3$ не делится на 4. Значит, этот случай также невозможен. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A и образующей 6 касаются друг друга внешним образом. У двух конусов угол между образующей и осью симметрии равен $\frac{\pi}{8}$, а у третьего он равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, где O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов.*

Ответ: $9\sqrt{\sqrt{2}+1}$.





Решение. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $l = 6$, B — середина отрезка O_1O_2, AD — общая образующая второго и третьего конусов. Тогда

$$AO_1 = AO_2 = l\cos\alpha, \quad AO_3 = l\cos\beta = l\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Четырехугольник AO_2DO_3 вписан в окружность с диаметром AD, откуда по теореме синусов

$$O_1O_3 = O_2O_3 = AD \cdot \sin\angle O_2AO_3 = l\sin(\alpha+\beta).$$

Аналогичным образом

$$O_1O_2 = l\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad BO_2 = l\sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{l}{2}\sin 2\alpha = l\,\tfrac{\sqrt{2}}{4}.$$

Опустим перпендикуляр BC на прямую AO_3. Заметим, что отрезки AB и O_3B перпендикулярны O_1O_2 как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1O_2 перпендикулярен плоскости ABO_3 и, значит, прямой AO_3. Поэтому ребро AO_3 перпендикулярно плоскости O_1O_2C и, в частности, отрезку CO_2. Поэтому

$$CO_2 = AO_2 \cdot \sin\angle O_2AC = l\cos\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

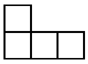
По теореме Пифагора мы получаем

$$BC = \sqrt{CO_2^2 - BO_2^2} = l\cos\alpha\sqrt{\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha} = l\cos\alpha\sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\beta)}{2}} =$$
$$= l\cos\tfrac{\pi}{8}\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}}{2}} = l\sqrt{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos^2\tfrac{\pi}{8}} = l\sqrt{\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\cos\tfrac{\pi}{4}\right)} = \tfrac{l\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}.$$

Пусть V — объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, AH — ее высота. Тогда

$$V = \tfrac{1}{6}\cdot O_1O_2\cdot BO_3\cdot AH = \tfrac{1}{3}\cdot O_1O_2\cdot S_{ABO_3} = \tfrac{1}{3}\cdot BO_2\cdot AO_3\cdot BC =$$
$$= \frac{l^3}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1} = \frac{l^3}{24}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1} = 9\sqrt{\sqrt{2}+1}. \quad \square$$

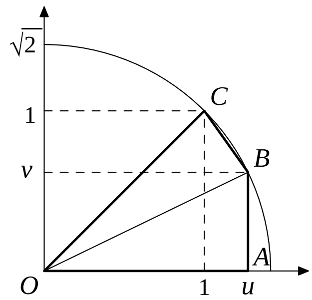
Вариант 3

1. *При каком наименьшем k можно так отметить k клеток доски 12×12, что при любом размещении на доске четырехклеточной фигурки*  *она задевает хотя бы одну отмеченную клетку? (Фигурку можно поворачивать и переворачивать.)*

   Ответ: 48.

Решение. Несложно заметить, что в любом прямоугольнике 2×3 есть хотя бы две отмеченные клетки. Поскольку доска 12×12 разрезается на 24 таких прямоугольника, в ней должно быть не менее 48 отмеченных клеток. Пример с 48 отмеченными клетками получается, если отметить клетки, сумма координат которых делится на 4. $\square$

2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leqslant 2$. Докажите неравенство $x^2y^2 + \left|x^2 - y^2\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$.*



Решение 1. Положим $u = x^2$, $v = y^2$. По условию

$$4 \geqslant 2\left(u^4 + v^4\right) \geqslant \left(u^2 + v^2\right)^2, \quad \text{откуда } \ u^2 + v^2 \leqslant 2.$$

В силу симметрии неравенства можно считать $u \geqslant v$. Рассмотрим четырехугольник $OABC$ (см. рисунок) с вершинами в точках

$$O = (0,0),\ A = (u,0),\ B = (u,v),\ C = (1,1)$$

Заметим, что $u - v = 2\,S_{OBC}$, поскольку $OC = \sqrt{2}$, а $\frac{u-v}{\sqrt{2}}$ есть расстояние от B до прямой OC. Таким образом, $uv + u - v = 2\,S_{OABC}$. Осталось заметить, что площадь $OABC$ не превосходит площади сектора радиуса $\sqrt{2}$ раствора $\frac{\pi}{4}$, которая равна $\frac{\pi}{4}$. $\square$

Решение 2. Положим $u = x^2$, $v = y^2$. В силу условия

$$4 \geqslant 2\left(u^4 + v^4\right) \geqslant \left(u^2 + v^2\right)^2, \quad \text{откуда } \ u^2 + v^2 \leqslant 2.$$

Тогда

$$uv + |u - v| = \tfrac{u^2+v^2}{2} + |u - v| - \tfrac{(u-v)^2}{2} \leqslant 1 + |u - v| - \tfrac{|u-v|^2}{2} = \tfrac{1}{2}\left(3 - (|u - v| - 1)^2\right) \leqslant \tfrac{3}{2} < \tfrac{\pi}{2}. \quad \square$$

3. *На высоте BH треугольника ABC отмечена некоторая точка D. Прямая AD пересекает сторону BC в точке E, прямая CD пересекает сторону AB в точке F. Точки G и J являются проекциями соответственно точек F и E на сторону AC. Площадь треугольника HEJ вдвое больше площади треугольника HFG. В каком отношении высота BH делит отрезок FE?*

   Ответ: $\sqrt{2} : 1$, считая от точки E.

Решение 1. Пусть T — точка пересечения AE и FG, M — точка пересечения CF и EJ, K — точка пересечения BH и FE (см. рисунок). Так как треугольники FDT и MDE подобны, по теореме Фалеса

$$\frac{EM}{FT} = \frac{DE}{DT} = \frac{HJ}{GH}.$$

Треугольники AFT и ABD подобны с коэффициентом, равным отношению их высот. Поэтому

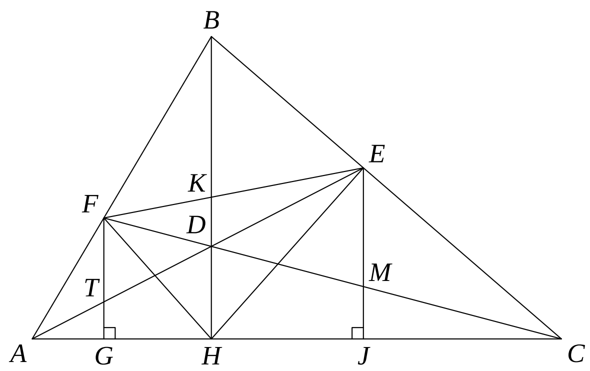
$$\frac{FT}{BD}=\frac{AG}{AH}=\frac{FG}{BH}, \quad \text{то есть } \frac{FG}{FT}=\frac{BH}{BD}.$$

Аналогичным образом получаем, что $\frac{EJ}{EM}=\frac{BH}{BD}$. Тогда

$$\frac{FG}{FT}=\frac{EJ}{EM}, \quad \text{откуда } \frac{EJ}{FG}=\frac{EM}{FT}=\frac{HJ}{GH}.$$

Значит, прямоугольные треугольники HEJ и HFG подобны. В силу теоремы Фалеса

$$\frac{EK}{KF}=\frac{HJ}{GH}=\sqrt{\frac{S_{HEJ}}{S_{HFG}}}=\sqrt{2}. \quad \square$$



Решение 2. Пусть $\lambda=\frac{GH}{HA}$, $\mu=\frac{HJ}{CH}$, K — точка пересечения BH и FE. Заметим, что

$$GF=(1-\lambda)\cdot BH, \quad EJ=(1-\mu)\cdot BH.$$

В силу теоремы Чевы

$$1=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CH}{HA}=\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\frac{CH}{HA}=\frac{1-\lambda}{1-\mu}\cdot\frac{\mu\cdot CH}{\lambda\cdot HA}=\frac{GF}{EJ}\cdot\frac{HJ}{GH}.$$

Тогда $\frac{HJ}{GH}=\frac{EJ}{GF}$, откуда вытекает подобие прямоугольных треугольников HEJ и HFG. В силу теоремы Фалеса

$$\frac{EK}{KF}=\frac{HJ}{GH}=\sqrt{\frac{S_{HEJ}}{S_{HFG}}}=\sqrt{2}. \quad \square$$

4. *На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2016 учеников нескольких спортивных школ, не более 40 от каждой школы. Учеников любой школы требуется разместить на одном ряду. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы это в любом случае удалось сделать?*

Ответ: 15.

Решение. Допустим, что 57 школ прислали на финальный матч по 35 учеников и одна школа — 21 ученика. Поскольку на одном ряду умещаются лишь четыре группы по 35 школьников, для размещения учеников 57 школ количество рядов должно быть не меньше $\frac{57}{4}=14\frac{1}{4}$, то есть по крайней мере 15.

Покажем, что 15 рядов достаточно. Предположим, что на трибуне есть один большой ряд, разделенный проходами на сектора по 168 мест. Посадим на этот большой ряд, игнорируя проходы, сначала учеников первой школы, затем второй, и так далее. В результате будет полностью занято 12 секторов. При такой рассадке на двух секторах могут оказаться ученики не более 11 школ. Так как любые четыре школы помещаются на одном секторе, для рассадки этих оставшихся учеников достаточно трех секторов. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 13. Найдите x.*

Ответ: 728.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 13. Остатки от деления степеней 9 на 13 равны $9, 3, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 13 означает, что n кратно 3, то есть $x = 9^{3m} - 1$. Отсюда

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \; q = 9^{2m} + 9^m + 1.$$

Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно, если число r делит p и q, то оно делит и 3, так как

$$3 = q - (9^{2m} - 1) - (9^m - 1) = q - p\,(9^m + 2).$$

Но p не кратно 3, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$. Запишем $p = (3^m - 1)(3^m + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел, бо́льших 4. Поэтому хотя бы одно из них не делится на 4 и, значит, не является степенью 2.

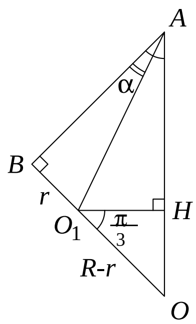
Если $m = 1$, мы получим $x = 9^3 - 1 = 728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Одно из чисел p и q делится на 13. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 13.* Тогда $m \,\vdots\, 3$, то есть $m = 3k$. Если $k = 1$, то p делится на 7 и 13. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 13.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 13, то есть $q = 13^s$ при некотором натуральном s. Значит, остаток от деления q на 8 равен 5 при нечетном s и 1 при четном. С другой стороны, этот остаток должен быть таким же, как у $9^{2m} + 9^m + 1$, то есть 3, что невозможно. $\square$

6. *Три одинаковых конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом. Каждый из них касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{2\pi}{3}$. Найдите угол при вершине у одинаковых конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\,\mathrm{arcctg}\,\frac{4+\sqrt{3}}{3}$.



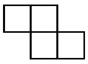
Решение. Обозначим искомый угол через 2α. Впишем в равные конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3 одного радиуса r. Они, очевидно, касаются друг друга. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O радиуса R, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается шаров, вписанных в одинаковые конусы (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Тогда $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R - r$. Кроме того, прямоугольные треугольники ABO_1, ACO_2 и ADO_3 равны по двум катетам, откуда $AO_1 = AO_2 = AO_3$. Значит, прямая AO проходит через центр

H описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ перпендикулярно к его плоскости. Заметим, что этот треугольник правильный и $O_1O_2 = 2r$, откуда $O_1H = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. С другой строны,

$$O_1H = OO_1 \cdot \cos \angle OO_1H = (R - r) \cos \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\,(R - r).$$

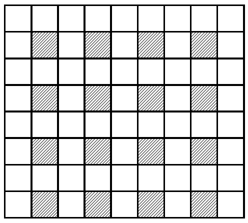
Поскольку $R = AB \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = r \operatorname{ctg} \alpha \, \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = r\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$, мы получаем

$$\tfrac{2r}{\sqrt{3}} = \tfrac{r}{2}\left(\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha - 1\right) \Longleftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha = \tfrac{4}{\sqrt{3}} + 1 \Longleftrightarrow 2\alpha = 2 \operatorname{arcctg} \tfrac{4+\sqrt{3}}{3}. \quad \square$$

1. *При каком наименьшем k можно так отметить k клеток доски 8×9, что при любом размещении на доске четырехклеточной фигурки*  *она задевает хотя бы одну отмеченную клетку? (Фигурку можно поворачивать и переворачивать.)*

Ответ: 16.

Решение. Несложно заметить, что в любом прямоугольнике 2×4 есть хотя бы две отмеченные клетки. Поскольку из доски 8×9 можно вырезать 8 непересекающихся прямоугольников 2×4, в ней должно быть не менее 16 отмеченных клеток. Пример с 16 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^{12}+y^{12}\leqslant 2$. Докажите неравенство $x^2+y^2+x^2y^2\leqslant 3$.*

Решение. Положим $u=x^2$, $v=y^2$. Необходимо доказать, что $u+v+uv\leqslant 3$. Заметим, что

$$(a+b)^3 \leqslant 4\left(a^3+b^3\right) \quad \text{при всех } \ a,b\geqslant 0.$$

Действительно, при $a=b=0$ все очевидно. В противном случае после сокращения на $a+b$ мы получим $a^2+2ab+b^2\leqslant 4\left(a^2-ab+b^2\right)$, что эквивалентно $3\,(a-b)^2\geqslant 0$. При $a=u^2$ и $b=v^2$ доказанное неравенство дает

$$8\geqslant 4\left(u^6+v^6\right)\geqslant\left(u^2+v^2\right)^3, \quad \text{откуда } \ u^2+v^2\leqslant 2.$$

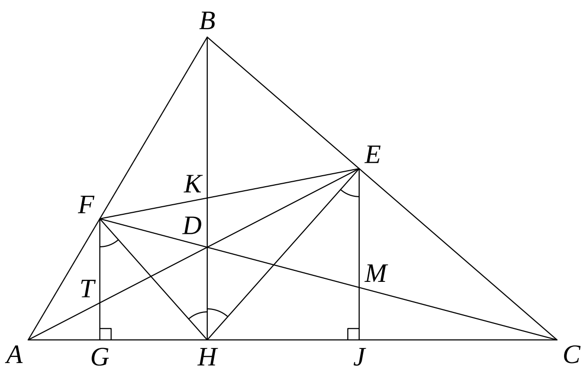
В силу неравенств Коши

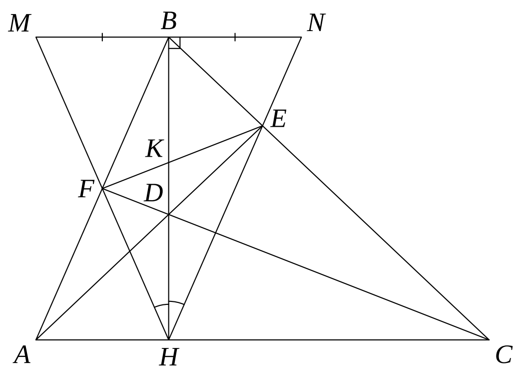
$$u+v\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}\leqslant 2, \quad uv\leqslant\tfrac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\leqslant 1,$$

то есть $u+v+uv\leqslant 3$. $\square$

3. *На высоте BH треугольника ABC отмечена некоторая точка D. Прямая AD пересекает сторону BC в точке E, прямая CD пересекает сторону AB в точке F. Известно, что BH делит отрезок FE в отношении $1:3$, считая от точки F. Найдите отношение $FH:HE$.*

Ответ: $1:3$.





Решение 1. Пусть G и H — проекции на AC точек F и E соответственно, T — точка пересечения AE и FG, M — точка пересечения CF и EJ, K — точка пересечения BH и FE (см. левый рисунок). Так как треугольники FDT и MDE подобны, по теореме Фалеса

$$\frac{EM}{FT}=\frac{DE}{DT}=\frac{HJ}{GH}.$$

Треугольники AFT и ABD подобны с коэффициентом, равным отношению их высот. Поэтому

$$\frac{FT}{BD} = \frac{AG}{AH} = \frac{FG}{BH}, \quad \text{то есть} \; \frac{FG}{FT} = \frac{BH}{BD}.$$

Аналогичным образом получаем, что $\frac{EJ}{EM} = \frac{BH}{BD}$. Тогда

$$\frac{FG}{FT} = \frac{EJ}{EM}, \quad \text{откуда} \; \frac{EJ}{FG} = \frac{EM}{FT} = \frac{HJ}{GH}.$$

Значит, прямоугольные треугольники HEJ и HFG подобны. Поскольку

$$\angle KHF = \angle HFG = \angle HEJ = \angle KHE,$$

отрезок HK является биссектрисой треугольника EHF. Поэтому

$$FH : HE = FK : KE = 1 : 3. \quad \square$$

Решение 2. Обозначим через K точку пересечения BH и EF. Пусть прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает лучи HF и HE в точках M и N соответственно (см. правый рисунок). Из подобия треугольников AFH и BFM

$$\frac{BM}{AH} = \frac{BF}{AF}, \quad \text{откуда} \; BM = \frac{BF \cdot AH}{AF}.$$

Подобие треугольников CEH и BEN дает

$$\frac{BN}{CH} = \frac{BE}{CE}, \quad \text{то есть} \; BN = \frac{BE \cdot CH}{CE}.$$

В силу теоремы Чевы

$$1 = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{AH}{CH} = \frac{BF \cdot AH}{AF} \cdot \frac{CE}{BE \cdot CH} = \frac{BM}{BN}.$$

Тогда отрезок HB является медианой и высотой треугольника MHN, а значит, и его биссектисой. Поэтому HK — биссектриса треугольника EHF, откуда $FH : HE = FK : KE = 1 : 3$. $\square$

4. *На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2016 учеников нескольких спортивных школ, не более 45 от каждой школы. Учеников любой школы требуется разместить на одном ряду. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы это в любом случае удалось сделать?*

Ответ: 16.

Решение. Допустим, что 46 школ прислали на финальный матч по 43 ученика и одна школа — 34 ученика. Поскольку на одном ряду умещаются лишь три группы по 43 школьника, для размещения учеников 46 школ количество рядов должно быть не меньше $\frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$, то есть по крайней мере 16.

Покажем, что 16 рядов достаточно. Предположим, что на трибуне есть один большой ряд, разделенный проходами на сектора по 168 мест. Посадим на этот большой ряд, игнорируя проходы, сначала учеников первой школы, затем второй, и так далее. В результате будет полностью занято 12 секторов. При такой рассадке на двух секторах могут оказаться ученики не более 11 школ. Так как любые три школы помещаются на одном секторе, для рассадки этих оставшихся учеников достаточно четырех секторов. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 7. Найдите x.*

Ответ: 728.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 7. Остатки от деления степеней 9 на 7 равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 7 означает, что n кратно 3, то есть $x = 9^{3m} - 1$. Отсюда

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \;\; q = 9^{2m} + 9^m + 1.$$

Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно, если число r делит p и q, то оно делит и 3, так как

$$3 = q - (9^{2m} - 1) - (9^m - 1) = q - p\,(9^m + 2).$$

Но p не кратно 3, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$. Запишем $p = (3^m - 1)(3^m + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел, бóльших 4. Поэтому хотя бы одно из них не делится на 4 и, значит, не является степенью 2.

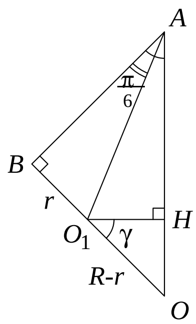
Если $m = 1$, мы получим $x = 9^3 - 1 = 728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Одно из чисел p и q делится на 7. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 7.* Тогда $m \,\vdots\, 3$, то есть $m = 3k$. Если $k = 1$, то p делится на 7 и 13. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 7.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 7, то есть $q = 7^s$ при некотором натуральном s. Значит, остаток от деления q на 8 равен 7 при нечетном s и 1 при четном. С другой стороны, этот остаток должен быть таким же, как у $9^{2m} + 9^m + 1$, то есть 3, что невозможно. $\square$

6. *Три одинаковых конуса с вершиной A и углом при вершине $\frac{\pi}{3}$ касаются друг друга внешним образом. Каждый из них касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Решение. Обозначим искомый угол через 2γ. Впишем в равные конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3 одного радиуса r. Они, очевидно, касаются друг друга. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O радиуса R, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается шаров, вписанных в одинаковые конусы (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Тогда $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R - r$. Кроме того, прямоугольные треугольники ABO_1, ACO_2 и ADO_3 равны по двум катетам, откуда $AO_1 = AO_2 = AO_3$. Значит, прямая AO проходит через центр H описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ перпендикулярно к его плоскости. Заметим, что этот треугольник правильный и $O_1O_2 = 2r$, откуда $O_1H = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. С другой строны,

$$O_1H = OO_1 \cdot \cos\angle OO_1H = (R - r)\cos\gamma.$$

Поскольку $R = AB \cdot \operatorname{tg}\gamma = r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\,\operatorname{tg}\gamma = r\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma$, мы получаем

$$\frac{2r}{\sqrt{3}} = r\left(\sqrt{3}\sin\gamma - \cos\gamma\right) \iff \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin\!\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \iff 2\gamma = \frac{\pi}{3} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \square$$

Вариант 5

1. *В клетках таблицы 10×10 расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ так, что сумма чисел, расположенных в любом квадратике 2×2, не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S.*

Ответ: 202.

Решение. Разобьем таблицу 10×10 на 25 квадратов 2×2. Поскольку сумма чисел во всей таблице равна

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050,$$

среднее арифметическое сумм чисел в этих 25 квадратах равно 202. Значит, хотя бы в одном квадрате сумма чисел не меньше 202, то есть $S \geqslant 202$. Пример расстановки, при которой реализуется значение $S = 202$, приведен на рисунке. $\square$

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

2. *Даны числа a, b, c, d, e, f, причем $b^2 \leqslant ac$. Докажите неравенство*

$$(af - cd)^2 \geqslant (ae - bd)(bf - ce).$$

Решение. Если $a = 0$ или $c = 0$, то $b = 0$, и неравенство очевидно. Пусть a и c отличны от нуля. Правая часть неравенства есть квадратный трехчлен от e

$$\varphi(e) = -ace^2 + eb(af + cd) - b^2 df$$

с отрицательным старшим коэффициентом. Максимум φ реализуется при $e = \dfrac{b(af + dc)}{2ac}$ и равен

$$b^2 \left(\frac{af + cd}{2c} - d\right)\left(f - \frac{af + cd}{2a}\right) = \frac{b^2}{4ac}(af - cd)^2,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство. $\square$

3. *Дан остроугольный треугольник ABC с углом $\angle ABC = \alpha$. На продолжении стороны BC взята такая точка D, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Оказалось, что биссектриса $\angle ADE$ касается окружности ω. В каком отношении точка C делит отрезок AE?*

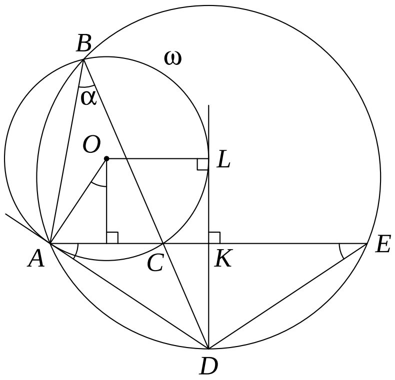
Ответ: $AC : CE = \sin\alpha$.

Решение. Пусть r — радиус ω, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно (см. рисунок). Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \angle ABD$. Кроме того, вписанные углы ABD и AED опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED$, то есть треугольник ADE — равнобедренный.

Поэтому $AK = KE$ и $DK \perp AE$. Отрезок AE параллелен радиусу OL окружности ω, поскольку они оба перпендикулярны DL. Тогда $AC = 2r \sin\alpha$ и

$$CE = AE - AC = 2AK - AC = 2\left(r + r\sin\alpha\right) - 2r\sin\alpha = 2r,$$

что и дает ответ. $\square$



4. *В школе 920 учеников, причем в каждом классе их не более k человек. Все школьники должны поехать на автобусную экскурсию. Для этого заказано 16 автобусов по 71 месту в каждом. Школьников нужно рассадить по автобусам так, чтобы ученики каждого класса оказались в одном автобусе. При каком наибольшем k это гарантированно можно сделать?*

   Ответ: 17.

   Решение. Если $k = 18$, то рассадить школьников по автобусам можно не всегда. Действительно, пусть в школе имеется 50 классов по 18 учеников и два по 10 учеников. В один автобус умещается лишь три класса по 18 школьников. Поэтому для перевозки учеников таких классов потребуется не менее 17 автобусов.

   Покажем, что если в каждом классе не более 17 учеников, то разместить школьников по автобусам всегда удастся. Пронумеруем места в автобусах сквозным образом: в первом — с 1 по 71, во втором — с 72 по 142, и так далее. Посадим в порядке возрастания номеров мест сначала всех учеников первого класса, затем — второго, и так далее. В результате школьники поместятся в 13 автобусов, поскольку $13 \cdot 71 = 923 > 920$. При такой рассадке в двух автобусах могут оказаться ученики не более 12 классов. Для размещения этих классов достаточно трех автобусов, поскольку в одном автобусе помещаются любые четыре класса. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 5^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

   Ответ: 3124.

   Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 11. Остатки от деления степеней 5 на 11 равны $5, 3, 4, 9, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 11 означает, что n кратно 5, то есть $x = 5^{5m} - 1$. Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 5^m - 1,\ \ q = 1 + 5^m + 5^{2m} + 5^{3m} + 5^{4m}.$$

Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (5^m - 1) - (5^{2m} - 1) - (5^{3m} - 1) - (5^{4m} - 1).$$

Разности вида $5^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но p не кратно 5, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$. Если $m = 2k$, то запишем $p = (5^k - 1)(5^k + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел. Хотя бы одно из них больше 4 и не делится на 4, поэтому оно не является степенью 2. Пусть теперь $m = 2k+1$. Тогда

$$p = 5^m - 5 + 4 = 5 \cdot (5^k - 1)(5^k + 1) + 4.$$

Правая часть не делится на 8, поскольку $(5^k - 1)(5^k + 1)$ кратно 8 как произведение соседних четных чисел. Так как $p > 4$, число p не может быть степенью двойки.

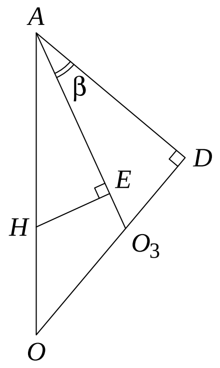
При $m = 1$ мы получим $x = 3124 = 4 \cdot 11 \cdot 71$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений не будет. Одно из чисел p и q делится на 11. Рассмотрим два случая.

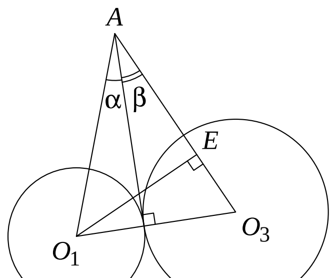
1) *p кратно 11.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 71. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 11.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11. Остаток от деления 5^m на 8 равен 5 при нечетном m и 1 при четном m. Если m нечетно, то остаток от деления q на 8 такой же, как у $1 + 5 + 1 + 5 + 1 = 13$, то есть он равен 5. При четном m остаток от деления q на 8 также равен 5. Но остатки от деления 11^s на 8 принимают только значения 3 и 1, поэтому q не может быть степенью 11. □

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем у первых двух угол при вершине равен $\frac{\pi}{6}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол при вершине третьего конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg}\big(\sqrt{3} + 4\big)$.





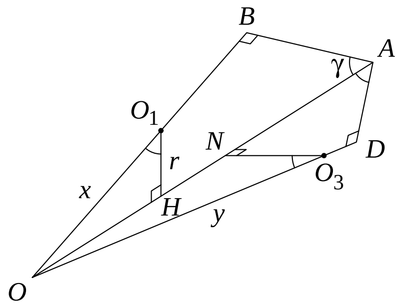
Решение 1. Пусть 2β — искомый угол, $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, одинаковы, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Заметим, что AO — ось симметрии четвертого конуса, и, значит, угол между AO и любой образующей этого конуса равен углу при вершине двух одинаковых конусов. Тогда AO касается этих конусов, то есть проходит через точку H касания шаров с центрами в O_1 и O_2. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Поэтому отрезок O_1H перпендикулярен плоскости ADO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, H и O_1 при проектировании на прямую AO_3 переходят в одну и ту же точку E. Тогда

$$AH \cdot \cos(2\alpha - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

$$\cos 2\alpha \cos\beta + \sin 2\alpha \sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha \sin\beta \Longleftrightarrow \cos\beta\,(1 - \cos 2\alpha) = \sin\beta\,(\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha).$$

Поскольку
$$\operatorname{tg}\alpha+\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\frac{2+\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\,,$$
мы получаем
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin 2\alpha\,(2+\cos 2\alpha)}{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{2+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=4+\sqrt{3}\Longleftrightarrow 2\beta=2\operatorname{arcctg}\bigl(\sqrt{3}+4\bigr).\quad\square$$



Решение 2. Пусть 2β — искомый угол, $\gamma=\frac{\pi}{6}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r, r, ρ, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, одинаковы, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB=AC=AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O радиуса R, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Заметим, что AO — ось симметрии четвертого конуса, и, значит, угол между AO и любой образующей этого конуса равен углу при вершине двух одинаковых конусов. Тогда AO касается этих конусов, то есть проходит через точку H касания шаров с центрами в O_1 и O_2. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Поэтому отрезок O_1H перпендикулярен плоскости ADO_3 и, в частности, прямой HO_3. Пусть N — проекция точки O_3 на прямую AO, $x=R-r$, $y=R-\rho$. Тогда
$$r=O_1H=x\cos\gamma,\quad NO_3=y\cos\gamma,\quad HN=|x-y|\sin\gamma.$$
По теореме Пифагора
$$\begin{aligned}O_1O_3^2=O_1H^2+HO_3^2=O_1H^2+NO_3^2+HN^2=\bigl(x^2+y^2\bigr)\cos^2\gamma+(x-y)^2\sin^2\gamma=\\=\bigl(x^2+y^2-(x-y)^2\bigr)\cos^2\gamma+(x-y)^2=2xy\cos^2\gamma+(x-y)^2=2ry\cos\gamma+(\rho-r)^2.\end{aligned}$$
С другой стороны, $O_1O_3=\rho+r$, откуда
$$2ry\cos\gamma=(\rho+r)^2-(\rho-r)^2=4\rho r\quad\text{и}\quad 2\rho=y\cos\gamma=(R-\rho)\cos\gamma.$$
Заметим, что $\rho=AD\cdot\operatorname{tg}\beta$, $R=AD\cdot\operatorname{tg}\gamma$. Поэтому
$$2\operatorname{tg}\beta=\sin\gamma-\operatorname{tg}\beta\cos\gamma\Longrightarrow\operatorname{ctg}\beta=\frac{2+\cos\gamma}{\sin\gamma}=4+\sqrt{3}.\quad\square$$

Вариант 6

1. *В черных клетках шахматной доски 8×8 расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 32$ так, что сумма чисел, расположенных в любом квадратике 2×2, не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S.*

Ответ: 33.

Решение. Разобьем шахматную доску на 16 квадратов 2×2. Поскольку сумма чисел, расположенных во всех черных клетках, равна

$$1 + 2 + \cdots + 32 = \frac{32 \cdot 33}{2} = 16 \cdot 33,$$

среднее арифметическое сумм чисел в этих 16 квадратах равно 33. Значит, хотя бы в одном квадрате сумма чисел не меньше 33, то есть $S \geqslant 33$. Пример расстановки, при которой реализуется значение $S = 33$, приведен на рисунке.

32		31		30		29	
	1		2		3		4
28		27		26		25	
	5		6		7		8
24		23		22		21	
	9		10		11		12
20		19		18		17	
	13		14		15		16

2. *Даны числа a, b, c, d, e, f, причем $b^2 \geqslant a^2 + c^2$. Докажите неравенство*

$$(af - cd)^2 \leqslant (ae - bd)^2 + (bf - ce)^2.$$

Решение. Если $a = c = 0$, то неравенство очевидно. В противном случае правая часть неравенства есть квадратный трехчлен от e

$$\varphi(e) = \left(a^2 + c^2\right)e^2 - 2eb(ad + cf) + b^2\left(d^2 + f^2\right)$$

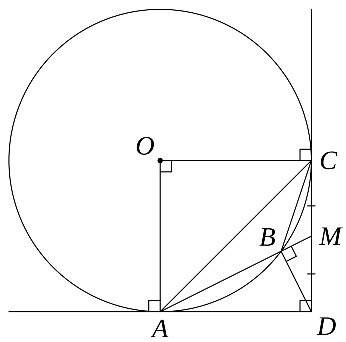
с положительным старшим коэффициентом. Минимум φ равен

$$-\frac{D}{4(a^2 + c^2)} = \frac{b^2}{a^2 + c^2}\left(\left(d^2 + f^2\right) - (ad + cf)^2\right) = \frac{b^2}{a^2 + c^2}\,(af - cd)^2,$$

где D — дискриминант φ. Отсюда и вытекает требуемое неравенство. $\square$

3. *Треугольник ABC с углом $\angle ABC = 135^\circ$ вписан в окружность ω. Прямые, касающиеся ω в точках A и C, пересекаются в точке D. Найдите $\angle ABD$, если известно, что AB делит отрезок CD пополам.*

Ответ: 90°.



Решение. Пусть O — центр ω, M — точка пересечения прямых AB и CD. Заметим, что

$$\angle AOC = 2\,(180^\circ - \angle ABC) = 2\,(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ.$$

Тогда четырехугольник $AOCD$ является квадратом и, значит, $\angle ADC = 90^\circ$. По теореме о касательной и секущей

$$DM^2 = MC^2 = BM \cdot AM, \quad \text{то есть } \frac{DM}{AM} = \frac{BM}{DM}.$$

Поэтому треугольники DBM и ADM подобны, откуда

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle MBD = 180^\circ - \angle ADM = 90^\circ. \quad \square$$

4. *На складе хранится 1500 тонн различных товаров в контейнерах. Вес любого контейнера кратен тонне и не превосходит k тонн. К складу подан состав из 25 платформ, грузоподъемность которых по 80 тонн. При каком максимальном k этим составом можно гарантированно вывезти весь товар?*

Ответ: 26.

Решение. Если $k = 27$, то вывезти весь товар можно не всегда. Действительно, пусть на складе имеется 55 контейнеров по 27 тонн и один весом 15 тонн. На одну платформу умещается лишь два контейнера по 27 тонн. Поэтому для перевозки 55 таких контейнеров потребуется не менее 28 платформ.

Покажем, что если вес каждого контейнера не более 26 тонн, то вывезти их со склада всегда удастся. Представим себе, что в контейнерах хранятся ящики весом по тонне каждый, а сами контейнеры невесомые. Будем последовательно загружать ящиками платформы: как только очередная платформа заполнена — переходим к следующей. Грузить будем сначала все ящики из первого контейнера, затем из второго, и так далее. В результате ящики поместятся на 19 платформах, поскольку $19 \cdot 80 = 1520 > 1500$. При таком размещении на двух платформах могут оказаться ящики из не более чем 18 контейнеров. Для размещения этих контейнеров достаточно 6 платформ, поскольку на одной платформе помещаются любые три контейнера. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 8^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 31. Найдите x.*

Ответ: 32 767.

Решение. Один из простых делителей x, очевидно, равен 7. Докажем вначале, что число вида $y = 8^k - 1$ является степенью 7 только в случае $k = 1$. Действительно, при $k > 1$ запишем $y = ab$, где $a = 2^k - 1$, $b = 2^{2k} + 2^k + 1$. Поскольку

$$b = 2^{2k} - 1 + 2^k - 1 + 3 = a\,(2^k + 2) + 3,$$

числа a и b не могут одновременно делиться на 7, и y не будет степенью 7.

Остатки от деления степеней 8 на 31 равны $8, 2, 16, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 31 означает, что n кратно 5, то есть $x = 8^{5m} - 1$. Заметим также, что m не делится на 4, иначе делителями x будут еще 3, 5 и 7. При $m = 1$ мы получим $x = 32\,767 = 7 \cdot 31 \cdot 151$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений не будет. По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 8^m - 1, \; q = 1 + 8^m + 8^{2m} + 8^{3m} + 8^{4m}.$$

Докажем, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (8^m - 1) - (8^{2m} - 1) - (8^{3m} - 1) - (8^{4m} - 1).$$

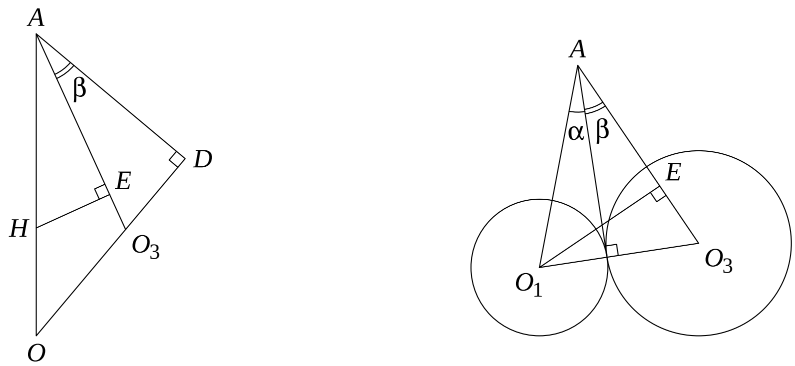
Разности вида $8^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но остатки от деления 8^m на 5 равны $3, 4, 2, 1$ и далее циклически повторяются. Так как m не кратно 4, число p не делится на 5, откуда $r = 1$. Значит, q не делится на 7, поскольку $p \,\vdots\, 7$. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 31.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 31 и 151. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится в произведение двух взаимно простых чисел, не являющихся степенями 7. С учетом делимости x на 7 мы получим, что x имеет не менее четырех различных простых делителей.

2) *q кратно 31.* Заметим, что p делится на 7, не являясь степенью 7, а q взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 31, то есть $q = 31^s$. Переходя к остаткам от деления на 8, мы получим $1 = (-1)^s$, откуда s четно. Кроме того, остатки от деления 31^s на 7 при четных s равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Но остаток от деления q на 7 равен 5. Таким образом, q не может быть степенью 31. □

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $2\arcsin\frac{1}{4}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A. Найдите угол при вершине у первых двух конусов, если он вдвое меньше, чем у четвертого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{4}$.



Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \arcsin\frac{1}{4}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, одинаковы, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Заметим, что AO — ось симметрии четвертого конуса, и, значит, угол между AO и любой образующей этого конуса равен углу при вершине двух одинаковых конусов. Тогда AO касается этих конусов, то есть проходит через точку H касания шаров с центрами в O_1 и O_2. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Поэтому отрезок O_1H перпендикулярен плоскости ADO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, H и O_1 при проектировании на прямую AO_3 переходят в одну и ту же точку E. Тогда

$$AH \cdot \cos(2\alpha - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

$$\cos 2\alpha \cos\beta + \sin 2\alpha \sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha \sin\beta \iff \cos\beta\,(1 - \cos 2\alpha) = \sin\beta\,(\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha).$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \frac{2 + \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},$$

мы получаем

$$\cos\beta\,(1 - \cos^2 2\alpha) = \sin\beta \sin 2\alpha\,(2 + \cos 2\alpha) \iff \cos\beta \sin 2\alpha = \sin\beta\,(2 + \cos 2\alpha) \iff$$

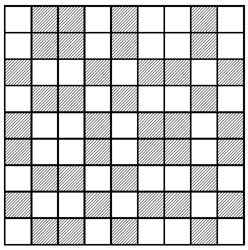
$$\iff \sin(2\alpha - \beta) = 2\sin\beta \iff 2\alpha = \arcsin(2\sin\beta) + \beta = \tfrac{\pi}{6} + \arcsin\tfrac{1}{4}. \quad \square$$

Вариант 7

1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 9×9, после чего Вася кладет на доску прямоугольник 1×4 и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл (прямоугольник можно поворачивать). Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение прямоугольника. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 40.

Решение. Покажем, что необходимо отметить не менее 40 клеток. Рассмотрим 5 клеток, идущих подряд: $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}$. Петя должен отметить хотя бы одну из клеток A и E. Действительно, если Петя не отметил клетки A и E, то он не сможет различить размещения прямоугольника на клетках $ABCD$ и на клетках $BCDE$. Значит, из любых клеток, идущих через три (как по горизонтали, так и по вертикали), хотя бы одна отмечена. Полоска 1×8 разбивается на четыре пары таких клеток, поэтому в ней не менее четырех отмеченных клеток. Заметим, что из доски 9×9 можно вырезать 10 непересекающихся полосок 1×8 (9 горизонтальных и одну вертикальную). Значит, должно быть отмечено не менее 40 клеток. Пример с 40 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^4+y^4 \geqslant 2$. Докажите неравенство $\left|x^{12}-y^{12}\right|+2x^6y^6 \geqslant 2$.*

Решение 1. Заметим, что

$$(u+v)^3 \leqslant 4\left(u^3+v^3\right) \quad \text{при всех } \ u, v \geqslant 0.$$

Действительно, при $u=v=0$ все очевидно. В противном случае после сокращения на $u+v$ мы получим $u^2+2uv+v^2 \leqslant 4\left(u^2-uv+v^2\right)$, что эквивалентно $3\,(u-v)^2 \geqslant 0$.

В силу симметрии неравенства мы можем считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда $x^6y^6 \geqslant y^{12}$, откуда

$$x^{12}-y^{12}+2x^6y^6 \geqslant x^{12}+y^{12} \geqslant \frac{(x^4+y^4)^3}{4} \geqslant 2. \quad \square$$

Решение 2. В силу симметрии и четности левой части неравенства мы можем считать, что $x \geqslant y \geqslant 0$. Положим

$$x = r\sqrt[6]{\cos t},\ y = r\sqrt[6]{\sin t}, \quad \text{где } r \geqslant 0,\ t \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right].$$

Заметим, что в силу вогнутости функции $t \mapsto \sqrt[3]{t}$

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b} \leqslant 2\sqrt[3]{\tfrac{a+b}{2}} = \sqrt[3]{4(a+b)} \quad \text{для любых } \ a, b \geqslant 0.$$

Применяя это неравенство для $a=\cos^2 t$ и $b=\sin^2 t$, мы получим

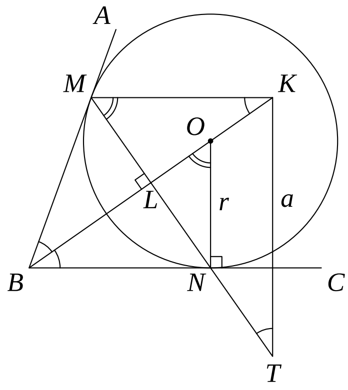
$$2 \leqslant x^4+y^4 = r^4\left(\sqrt[3]{\cos^2 t}+\sqrt[3]{\sin^2 t}\right) \leqslant r^4\sqrt[3]{4\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)} = r^4 \cdot 2^{\frac{2}{3}},$$

откуда $r^4 \geqslant \sqrt[3]{2}$ и $r^{12} \geqslant 2$. Поэтому при $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$x^{12}-y^{12}+2x^6y^6 = r^{12}\left(\cos^2 t-\sin^2 t+2\sin t\cos t\right) =$$
$$= r^{12}\left(\cos 2t+\sin 2t\right) = r^{12}\sqrt{2}\sin\left(2t+\tfrac{\pi}{4}\right) \geqslant r^{12} \geqslant 2. \quad \square$$

3. *Окружность с центром O радиуса r касается сторон BA и BC острого угла ABC в точках M и N соответственно. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает луч BO в точке K. На луче MN выбрана точка T так, что $\angle MTK = \frac{1}{2}\angle ABC$. Найдите длину отрезка BO, если $KT = a$.*

Ответ: $\sqrt{r(a+r)}$.



Решение. Пусть L — точка пересечения MN с лучом BO. Заметим, что треугольник MBN равнобедренный, а BL — биссектриса его угла B. Значит, BL будет также высотой и медианой треугольника MBN. Тогда $\angle KLM = 90°$, а прямоугольные треугольники KLM и BLN равны, откуда $MK = BN$. Кроме того,

$$\angle MKL = \angle LBC = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle MTK.$$

Таким образом, треугольники MKT и MLK подобны по двум углам. Поэтому $\angle MKT = 90°$, и треугольник MKT подобен также ONB. Тогда

$$\frac{KT}{MK} = \frac{BN}{ON} \iff \frac{a}{BN} = \frac{BN}{r} \iff BN^2 = ar.$$

По теореме Пифагора

$$BO = \sqrt{BN^2 + ON^2} = \sqrt{ar + r^2} = \sqrt{r(a+r)}. \quad \square$$

4. *В театре k рядов кресел. 770 зрителей пришли в театр и расселись по местам (заняв, возможно, не все кресла). После антракта все зрители забыли, на каких местах они располагались, и сели по-другому. При каком наибольшем k заведомо найдется 4 зрителя, которые и до, и после антракта сидели на одном ряду?*

Ответ: 16.

Решение. Если зрители расселись на 16 рядов, то на каком-то ряду оказалось не менее 49 зрителей (в противном случае на каждом ряду не более 48 зрителей, а всего их тогда не более $16 \cdot 48 = 768 < 770$). Так как $\frac{49}{16} > 3$, нельзя рассадить зрителей этого ряда после антракта так, чтобы в каждом ряду их оказалось не более трех. Таким образом, $k = 16$ нас устраивает.

Покажем теперь, что при наличии 17 рядов зрителей можно рассадить так, чтобы нужных четырех зрителей не нашлось. Назовем *n-й колонкой* места в зале с номером n, циклически упорядоченные по рядам:

$$1, 2, \ldots, 17, 1, 2, \ldots, 17, \ldots. \qquad (*)$$

Пусть *циклический сдвиг* колонки на m рядов — перестановка колонки, при которой новый номер ряда каждого зрителя получается из старого сдвигом на m позиций вправо в последовательности $(*)$. Заполним зрителями колонки с номерами от 1 по 45, а также первые 5 мест 46-й колонки. Таким образом, в зале окажется $17 \cdot 45 + 5 = 770$ человек. После антракта мы рассадим зрителей следующим образом. Зрители колонок 1, 2, 3 садятся на свои места; в колонках 4, 5, 6 зрители циклически сдвигаются на один ряд, в колонках 7, 8, 9 — на два ряда, и так далее. В результате мы получим ситуацию, когда нет четырех зрителей, сидевших на одном ряду и до, и после антракта. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

Ответ: 59 048.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 11. Докажем вначале, что число $3^s + 1$ не может быть степенью двойки при $s > 1$, а число $3^s - 1$ — при $s > 2$. Действительно, при $s > 1$ число $3^s + 1$ больше 8 и не делится на 8, так как его остаток от деления на 8 равен 4 или 2. Пусть теперь $s > 2$. Если s нечетно, число $3^s - 1$ больше 8 и не делится на 8, так как его остаток от деления на 8 равен 2. Если $s = 2k$, то $3^s - 1$ делится на число $3^k + 1$, которое не является степенью двойки. Из доказанного, в частности, вытекает, что $9^s - 1$ будет степенью двойки только при $s = 1$.

Остатки от деления степеней 9 на 11 равны $9, 4, 3, 5, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 11 означает, что n кратно 5, то есть $x = 9^{5m} - 1$. Если $m = 1$, мы получим $x = 9^5 - 1 = 59\,048 = 2^3 \cdot 11^2 \cdot 61$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Рассмотрим два случая.

1) *m нечетно.* По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } \ p = 9^m - 1, \ \ q = 1 + 9^m + 9^{2m} + 9^{3m} + 9^{4m}.$$

Докажем, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (9^m - 1) - (9^{2m} - 1) - (9^{3m} - 1) - (9^{4m} - 1).$$

Разности вида $9^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но p не кратно 5 при нечетном m, откуда $r = 1$.

Пусть p кратно 11. Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 61. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

Пусть теперь q кратно 11. Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11, то есть $q = 11^s$. Но остаток от деления 11^s на 8 равен 3 при нечетном s и 1 при четном, а остаток от деления q на 8 равен 5. Поэтому число q не может быть степенью 11.

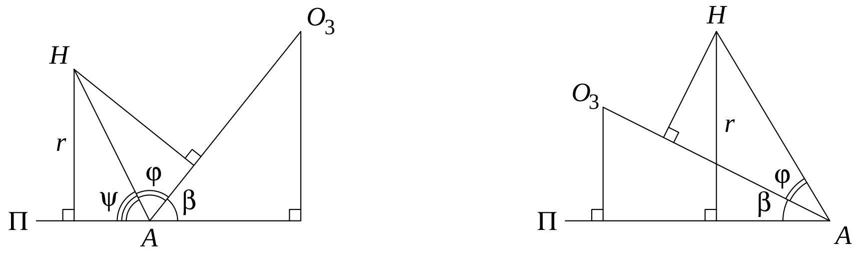
2) *m четно.* Тогда $n = 2k$ при $k \geqslant 5$, и

$$x = (9^k - 1)(9^k + 1) = (3^k - 1)(3^k + 1)(9^k + 1).$$

Множители в правой части взаимно просты, поскольку пары чисел $3^k \pm 1$ и $9^k \pm 1$ нечетны и отличаются на 2. Кроме того, ни один из множителей не является степенью двойки. Действительно, для первых двух мы это уже доказали, а $9^k + 1$ больше 8 и дает при делении на 8 остаток 2. Таким образом, x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $\frac{\pi}{2}$. Все конусы касаются также одной плоскости, проходящей через точку A, и лежат по одну сторону от нее. Найдите угол при вершине у первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.



Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \frac{\pi}{4}$, Π — плоскость, которой касаются конусы. Впишем в конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Обозначим через r радиус первых двух шаров, а через H — точку их касания. Так как оба шара касаются плоскости Π, расстояние от O_1 и O_2 до Π равно r. Тогда $O_1O_2 \parallel \Pi$, поэтому расстояние от H до Π также равно r. Пусть $\varphi = \angle HAO_3$, ψ — угол между лучом AH и плоскостью Π. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1H перпендикулярен плоскости HAO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, проекции отрезков AH и AO_1 на прямую AO_3 равны, откуда

$$AH \cdot \cos\varphi = AO_1 \cdot \cos(\alpha+\beta) = \frac{AH}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha+\beta).$$

Заметим также, что $\sin\psi = \frac{r}{AH} = \operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим два случая.

1) $\varphi = \pi - \beta - \psi$ (см. левый рисунок). Тогда

$$\cos(\pi-\beta-\psi) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \iff \sin\beta\sin\psi - \cos\beta\cos\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha \iff$$
$$\iff \cos\beta\,(1+\cos\psi) = 2\sin\beta\sin\psi \iff \operatorname{tg}\tfrac{\psi}{2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\beta = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\psi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}} = \tfrac{4}{5}.$$

2) $\varphi = \psi - \beta$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos(\psi-\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \iff \cos\beta\cos\psi + \sin\beta\sin\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha \iff$$
$$\iff \cos\beta\,(1-\cos\psi) = 2\sin\beta\sin\psi \iff \operatorname{ctg}\tfrac{\psi}{2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\beta = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\psi = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\psi}{2}} = \tfrac{4}{5}.$$

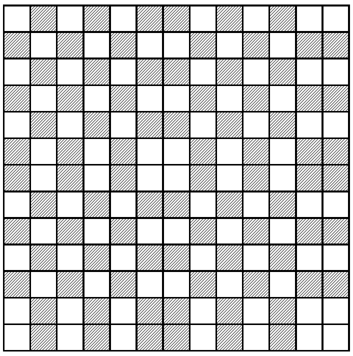
Таким образом, в обоих случаях мы получаем $2\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$. $\square$

Вариант 8

1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 13×13, после чего Вася кладет на доску прямоугольник 1×6 и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл (прямоугольник можно поворачивать). Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение прямоугольника. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 84.

Решение. Покажем, что необходимо отметить не менее 84 клеток. Рассмотрим 7 клеток, идущих подряд: $\boxed{A|B|C|D|E|F|G}$. Петя должен отметить хотя бы одну из клеток A и G. Действительно, если Петя не отметил клетки A и G, то он не сможет различить размещения прямоугольника на клетках $ABCDEF$ и на клетках $BCDEFG$. Значит, из любых клеток, идущих через пять (как по горизонтали, так и по вертикали), хотя бы одна отмечена. Полоска 1×12 разбивается на шесть пар таких клеток, поэтому в ней не менее шести отмеченных клеток. Заметим, что из доски 13×13 можно вырезать 14 непересекающихся полосок 1×12 (13 горизонтальных и одну вертикальную). Значит, должно быть отмечено не менее $14 \cdot 6 = 84$ клеток. Пример с 84 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



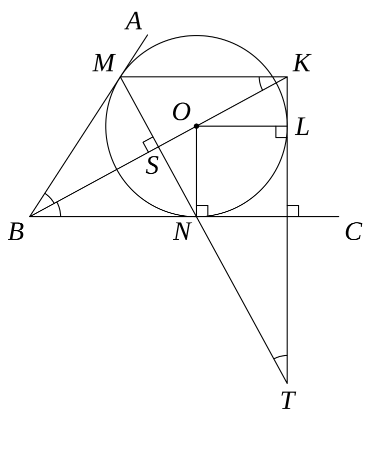
2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^4 + y^4 \geqslant 2$. Докажите неравенство $\left|x^{16} - y^{16}\right| + 4x^8y^8 \geqslant 4$.*

Решение. Заметим, что $u^2 + v^2 \geqslant \frac{1}{2}(u+v)^2$ при любых $u, v \geqslant 0$, поскольку это неравенство эквивалентно $(u-v)^2 \geqslant 0$. В силу симметрии неравенства мы можем считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда $x^8y^8 \geqslant y^{16}$, откуда

$$x^{16} - y^{16} + 4x^8y^8 \geqslant x^{16} + 2x^8y^8 + y^{16} = \left(x^8 + y^8\right)^2 \geqslant \frac{\left(x^4+y^4\right)^4}{4} \geqslant 4. \quad \square$$

3. *Окружность ω с центром O касается сторон BA и BC острого угла ABC в точках M и N соответственно. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает луч BO в точке K. На луче MN выбрана точка T так, что $\angle MTK = \frac{1}{2}\angle ABC$. Оказалось, что прямая KT касается ω. Найдите площадь треугольника OKT, если $BM = a$.*

Ответ: $\dfrac{a^2}{2}$.



Решение. Пусть L — точка касания KT с ω, S — точка пересечения MN с лучом BO. Заметим, что треугольник MBN равнобедренный, а BS — биссектриса его угла B. Значит, BS будет также высотой и медианой треугольника MBN, то есть $MS = SN$ и $\angle KSM = 90^\circ$. Прямоугольные треугольники BSN и KSM равны по катету и углу, откуда $MK = BN = a$. Кроме того,

$$\angle MKS = \angle SBC = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle MTK.$$

Таким образом, треугольники MKT и MSK подобны по двум углам. Поэтому $\angle MKT = 90^\circ$, и треугольник MKT подобен также ONB. Тогда

$$\frac{KT}{a} = \frac{KT}{BM} = \frac{KT}{BN} = \frac{MK}{ON} = \frac{a}{OL},$$

и площадь треугольника OTK равна $\dfrac{KT \cdot OL}{2} = \dfrac{a^2}{2}$. $\square$

4. *У библиофила Васи 1300 книг, расставленных в шкафах на k книжных полках. Однажды Вася переставил шкафы на новое место, предварительно вынув из них все книги. При этом он совершенно забыл, как книги стояли раньше, и расставил их в шкафах в другом порядке. При каком наибольшем k заведомо найдется 5 книг, которые и до, и после перестановки стояли на одной полке?*

Ответ: 18.

Решение. Если у Васи 18 полок, то на какой-то полке стоит не менее 73 книг (в противном случае на каждой полке не более 72 книг, а всего их тогда не более $18 \cdot 72 = 1296 < 1300$). Так как $\frac{73}{18} > 4$, нельзя расставить книги с этой полки так, чтобы на каждой полке оказалось не более четырех книг. Таким образом, $k = 18$ нас устраивает.

Покажем теперь, что при наличии 19 полок книги можно переставить так, чтобы нужных пяти книг не нашлось. Назовем *n-м рядом* книги, стоящие на полках на n-м месте слева, циклически упорядоченные по полкам:

$$1, 2, \ldots, 19, 1, 2, \ldots, 19, \ldots. \qquad (*)$$

Пусть *циклический сдвиг* ряда на m полок — перестановка книг, при которой новый номер полки для каждой книги получается из старого сдвигом на m позиций вправо в последовательности $(*)$. Заполним книгами ряды с номерами от 1 по 68, а также первые 8 полок 69-го ряда. Таким образом, на полках окажется $19 \cdot 68 + 8 = 1300$ книг. После перестановки шкафов мы расставим книги следующим образом. Книги из рядов 1, 2, 3 и 4 поставим на свои места; в рядах 5, 6, 7 и 8 книги циклически сдвинем на одну полку, в рядах 9, 10, 11 и 12 — на две полки, и так далее. В результате мы получим ситуацию, когда нет пяти книг, стоявших на одной полке и до, и после перестановки. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — нечетное натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 61. Найдите x.*

Ответ: 59 048.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 61. Остатки от деления степеней 9 на 61 равны $9, 20, 58, 34, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 61 означает, что n кратно 5, то есть $x = 9^{5m} - 1$, где m нечетно. По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \ \ q = 1 + 9^m + 9^{2m} + 9^{3m} + 9^{4m}.$$

Докажем, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (9^m - 1) - (9^{2m} - 1) - (9^{3m} - 1) - (9^{4m} - 1).$$

Разности вида $9^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но p не кратно 5 при нечетном m, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки в точности при $m = 1$. Действительно, для $m > 1$ запишем $p = (3^m - 1)(3^m + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел, бо́льших 2. Поэтому хотя бы одно из них не делится на 4 и, значит, не является степенью 2.

Если $m = 1$, мы получим $x = 9^5 - 1 = 59\,048 = 2^3 \cdot 11^2 \cdot 61$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 61.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 61. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 61.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 61, то есть $q = 61^s$. Заметим, что $s \,\vdots\, 3$, так как $q - 1$ кратно 9, а остатки от деления 61^s на 9 равны $7, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Кроме того, при делении на 8 число q дает остаток 5, а остаток 61^s равен 5 при нечетном s и 1 при четном. Значит, s нечетно, откуда s имеет вид $6k + 3$ при некотором натуральном k.

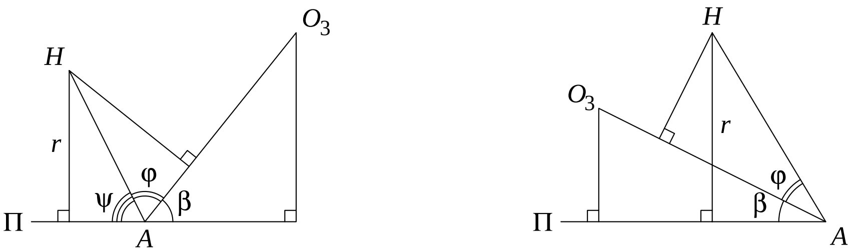
Сравним теперь остатки q и 61^s от деления на 7. Остатки 61^s равны $5, 4, 6, 2, 3, 1$ и далее циклически повторяются. Для $s = 6k + 3$ все они совпадают с 6. Остатки 9^m равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Поэтому нам достаточно найти остатки q при $m = 1, 2, 3$. Они равны

$$\begin{aligned}
&(1 + 2 + 4 + 1 + 2) \mod 7 = 3, \quad \text{если } m = 1,\\
&(1 + 4 + 1 + 2 + 4) \mod 7 = 5, \quad \text{если } m = 2,\\
&(1 + 1 + 2 + 4 + 1) \mod 7 = 2, \quad \text{если } m = 3.
\end{aligned}$$

Поскольку ни одно из этих чисел не совпадает с 6, q не может быть степенью 61. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем у первых двух из них угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$. Все конусы касаются также одной плоскости, проходящей через точку A, и лежат по одну сторону от нее. Найдите угол при вершине у третьего конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arcctg} 2\big(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\big)$.



Решение. Пусть 2β — искомый угол, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, Π — плоскость, которой касаются конусы. Впишем в конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Обозначим через r радиус первых двух шаров, а через H — точку их касания. Так как оба шара касаются плоскости Π, расстояние от O_1 и O_2 до Π равно r. Тогда $O_1O_2 \parallel \Pi$, поэтому расстояние от H до Π также равно r. Пусть $\varphi = \angle HAO_3$, ψ — угол между лучом AH и плоскостью Π. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1H перпендикулярен плоскости HAO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, проекции отрезков AH и AO_1 на прямую AO_3 равны, откуда

$$AH \cdot \cos\varphi = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AH}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим также, что

$$\sin\psi = \frac{r}{AH} = \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\psi = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\varphi = \pi - \beta - \psi$ (см. левый рисунок). Тогда

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha} = \cos(\pi - \beta - \psi) \iff \cos\beta - \sin\beta\sin\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha = \sin\beta\sin\psi - \cos\beta\cos\psi,$$

откуда
$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{2\sin\psi}{1+\cos\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 2\big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big) \quad \text{и} \quad 2\beta = 2\operatorname{arcctg} 2\big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big).$$

2) $\varphi = \psi - \beta$ (см. правый рисунок). Тогда
$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = \cos(\psi-\beta) \Longleftrightarrow \cos\beta - \sin\beta\sin\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha = \cos\beta\cos\psi + \sin\beta\sin\psi,$$
откуда
$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{2\sin\psi}{1-\cos\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2\big(\sqrt{3}+\sqrt{2}\big) \quad \text{и} \quad 2\beta = 2\operatorname{arcctg} 2\big(\sqrt{3}+\sqrt{2}\big). \quad \square$$

Вариант 9

1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 9×9, после чего Вася кладет на доску уголок из трех клеток и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл. Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение уголка. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 68.

Решение. Отметим вначале несколько простых фактов.

1) *В любом прямоугольнике 2×3 неотмеченных клеток не более одной.* Это проверяется прямым перебором.

2) *В любом квадрате 3×3 неотмеченных клеток не более двух и, если их две, то они расположены в противоположных углах квадрата.* В противном случае найдутся две неотмеченные клетки, попадающие в один прямоугольник 2×3.

3) *Любой прямоугольник 3×6 (вертикальный или горизонтальный) содержит не более трех неотмеченных клеток.* Действительно, разобьем прямоугольник на два квадрата 3×3 и накроем их общую сторону прямоугольником 2×3. В силу 1) в нем может быть лишь одна неотмеченная клетка. Тогда в одном из квадратов две смежные угловые клетки отмечены. В силу 2) в этом квадрате есть не более одной неотмеченной клетки, а в другом их не более двух.

Разобъем доску на 9 квадратов 3×3. В силу 3) по две неотмеченные клетки могут содержать не более чем пять из них. Если таких квадратов 4, то общее число неотмеченных клеток не превосходит $4\cdot 2+5=13$. Если же их пять, то согласно 3) они идут в шахматном порядке. Поэтому неотмеченные клетки могут располагаться лишь так, как показано на рисунке (с точностью до поворота доски).

*						*		
		*						*
					*			
			*					
*						*		
		*						*

Но тогда в остальных квадратах все клетки должны быть отмечены, поскольку любая из них может быть накрыта прямоугольником 2×3 вместе с какой-то из неотмеченных клеток. Значит, в этом случае может быть не более 10 неотмеченных клеток. Пример с 13 неотмеченными (то есть с 68 отмеченными) клетками показан на рисунке. $\square$

*				*				*
		*				*		
*				*				*
		*				*		
*				*				*

2. *Даны положительные числа a,b,c,d,e,f, причем $\left|\sqrt{ab}-\sqrt{cd}\right|\leqslant 2$. Докажите неравенство*

$$\left(\frac{e}{a}+\frac{b}{e}\right)\left(\frac{e}{c}+\frac{d}{e}\right)\geqslant\left(\frac{f}{a}-b\right)\left(d-\frac{f}{c}\right).$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства через $\varphi(e)$, а правую — через $\psi(f)$. В силу неравенства Коши

$$\varphi(e)=\frac{d}{a}+\frac{b}{c}+\frac{e^2}{ac}+\frac{bd}{e^2}\geqslant\frac{d}{a}+\frac{b}{c}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}=\left(\sqrt{\frac{d}{a}}+\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2.$$

Заметим, что

$$\psi(f) = -\frac{f^2}{ac} + f\left(\frac{d}{a} + \frac{b}{c}\right) - bd,$$

то есть правая часть неравенства есть квадратный трехчлен относительно f с дискриминантом

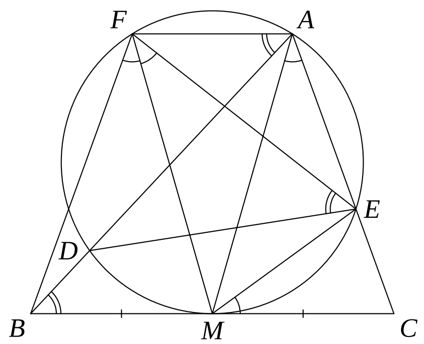
$$\left(\frac{d}{a} + \frac{b}{c}\right)^2 - 4 \cdot \frac{bc}{ad} = \left(\frac{d}{a} - \frac{b}{c}\right)^2.$$

Тогда при любых $e, f > 0$

$$\psi(f) \leqslant \frac{ac}{4}\left(\frac{d}{a} - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{ac}{4}\left(\sqrt{\frac{d}{a}} - \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\left(\sqrt{\frac{d}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sqrt{cd} - \sqrt{ab}}{2}\right)^2 \cdot \varphi(e) \leqslant \varphi(e). \quad \square$$

3. *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. На дуге AD, не содержащей точку E, выбрали такую точку F, что $\angle BFE = 72°$. Оказалось, что $\angle DEF = \angle ABC$. Найдите угол $\angle CME$.*

   Ответ: $36°$.



Решение. Вписанные углы DAF и DEF опираются на дугу DF и потому равны. В силу условия $\angle FAB = \angle ABC$, откуда $BC \parallel AF$. Тогда прямая ℓ, проходящая через точку M перпендикулярно касательной BC, содержит диаметр окружности ω и перпендикулярна ее хорде AF. Значит, точки A и F симметричны относительно ℓ, то есть ℓ является осью симметрии трапеции $BCAF$. Отсюда вытекает, что $AC = BF$ и $AM = FM$. Следовательно, треугольники BFM и CAM равны по трем сторонам, поэтому $\angle BFM = \angle EAM$. Кроме того, $\angle EFM = \angle EAM$ как вписанные углы, опирающиеся на одну хорду. Тогда FM — биссектриса угла BFE, и

$$\angle EAM = \angle EFM = \tfrac{1}{2}\angle BFE = 36°.$$

Заметим теперь, что угол между хордой EM и касательной BC равен вписанному углу, опирающемуся на EM. Поэтому $\angle CME = \angle EAM = 36°$. $\square$

4. *В коробке лежит вперемешку большая партия цветов шести видов. Вася случайным образом берет цветки по одному из коробки. Как только набирается 5 цветов одного вида, Вася составляет из них букет и продает его. Какое наименьшее количество цветов ему надо взять, чтобы гарантированно продать 10 букетов?*

   Ответ: 70.

Решение. Заметим, что 69 цветков не хватит. Действительно, если Вася вытащил 49 цветков первого вида и по 4 цветка каждого из остальных видов, то он в общей сложности взял $49 + 5 \cdot 4 = 69$ цветков, но из них можно собрать лишь 9 букетов.

Пусть Вася вытащил 70-й цветок и, возможно, продал один букет. Из оставшихся цветов составить букет уже нельзя. Поэтому у Васи на руках оказалось не более четырех цветков каждого вида, а всего не более 24 цветов. Так как и 70, и количество проданных цветов кратны 5, остаться могло не более 20 цветов. Значит, Вася продал как минимум 50 цветков, то есть 10 букетов. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 7^n + 1$, где n — нечетное натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

Ответ: 16808.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 11. Делимость x на 11 равносильна тому, что n — нечетное кратное 5, то есть $x = 7^{5m} + 1$ при некотором нечетном m. Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 7^m + 1, \;\; q = 1 - 7^m + 7^{2m} - 7^{3m} + 7^{4m}.$$

Заметим, что p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (7^m + 1) - (7^{2m} - 1) - (7^{3m} + 1) - (7^{4m} - 1).$$

Выражения, стоящие в скобках в правой части, делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но остатки от деления степеней 7 на 5 равны $2, 4, 3, 1$ и далее циклически повторяются. Значит, p не кратно 5 при нечетных m, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$ и $7^m + 1 = 2^s$. Тогда $s \geqslant 4$ и число $7^m + 1$ кратно 16. Но это невозможно, поскольку остатки от деления 7^m на 16 принимают только значения 7 и 1.

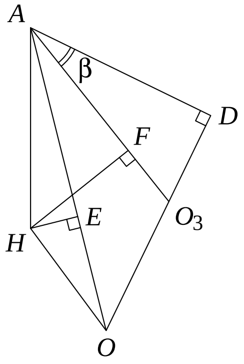
Если $m = 1$, мы получим $x = 16808 = 2^3 \cdot 11 \cdot 191$, что нам подходит. Покажем, что при $m \geqslant 3$ решений не будет. Рассмотрим два случая.

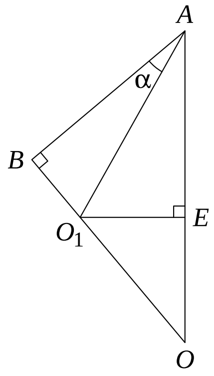
1) *p кратно 11.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 191. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

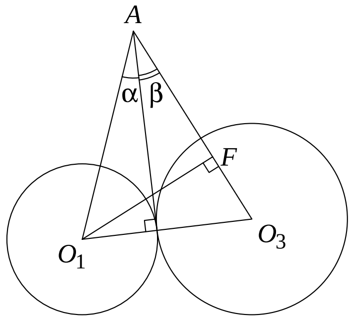
2) *q кратно 11.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11. Остаток от деления 7^m на 8 равен -1 ввиду нечетности m. Поэтому число q дает при делении на 8 остаток 5. Но остатки от деления 11^s на 8 принимают только значения 3 и 1, поэтому q не может быть степенью 11. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{5\pi}{6}$. Найдите угол при вершине у первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\big(\sqrt{3} - 1\big)$.







Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{5\pi}{12}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, имеют одинаковую длину, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно, причем $OO_1 = OO_2$. Пусть H — точка касания шаров с центрами O_1 и O_2, $\varphi = \angle HAD$. Отрезки AH, OH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A, O_1O_2O и $O_1O_2O_3$. Поэтому точки A, O, O_3, D лежат в плоскости, проходящей через точку H перпендикулярно O_1H. В частности, $AO \perp O_1H$ и $AO_3 \perp O_1H$. Значит, точки H и O_1 имеют одинаковые проекции как на прямую AO, так и на прямую AO_3 (обозначим эти проекции через E и F соответственно). Отсюда

$$AH \cdot \cos(\varphi - \gamma) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AE = AO_1 \cdot \cos(\gamma - \alpha) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\gamma - \alpha),$$
$$AH \cdot \cos(\varphi - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAF = AF = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AF = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

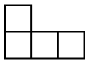
$$\begin{cases} \cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma = \cos\gamma + \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma, \\ \cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma\,(\cos\varphi - 1) + \sin\varphi, \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta\,(1 - \cos\varphi) - \sin\varphi. \end{cases}$$

Исключая из системы $\operatorname{tg}\alpha$, мы получим $2\sin\varphi = (1 - \cos\varphi)(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$, откуда

$$\operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1 + \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}}\right) = 1.$$

Тогда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и из второго уравнения системы $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta - 1 = \sqrt{3} - 1$. $\square$

Вариант 10

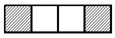
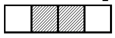
1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 8×8, после чего Вася кладет на доску четырехклеточную фигурку*  *и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение фигурки. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 48.

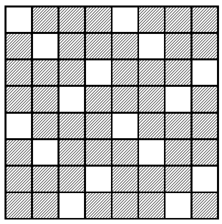
Решение. Покажем, что отмечено не менее 48 клеток. Проверим вначале следующее утверждение: *среди любых двух клеток, идущих через одну по горизонтали, вертикали или диагонали, хотя бы одна отмечена.* Действительно, рассмотрим квадрат 3×3:

A		
B		F
C	D	E

Если Петя не отметил клетки B и F, то он не сможет различить размещения фигурки на клетках $BCDE$ и $CDEF$. Если же Петя не отметил клетки A и E, то он не сможет различить размещения фигурки на клетках $ABCD$ и $BCDE$.

Покажем теперь, что в любом квадрате 4×4 не может быть более четырех неотмеченных клеток. Ясно, что никакая строка квадрата не содержит более двух неотмеченных клеток. Возьмем две строки квадрата, номера которых различаются на 2. Если в одной из строк есть две неотмеченные клетки, то они расположены одним из двух способов:  или . Тогда из доказанного утверждения вытекает, что в другой строке все клетки должны быть отмечены. Значит, в выбраной паре строк не более двух неотмеченных клеток, и в оставшейся паре тоже.

Поскольку доска 8×8 разрезается на четыре квадрата 4×4, в ней может быть не более 16 неотмеченных клеток. Таким образом, отмечено должно быть не менее 48 клеток. Пример с 48 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны положительные числа a, b, c, d, e, f, причем $\left|\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$\left(ae + \frac{b}{e}\right)\left(ce + \frac{d}{e}\right) \geqslant \left(a^2 f^2 - \frac{b^2}{f^2}\right)\left(\frac{d^2}{f^2} - c^2 f^2\right).$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства через $\varphi(e)$, а правую — через $\psi(f)$. В силу неравенства Коши

$$\varphi(e) = ad + bc + ace^2 + \frac{bd}{e^2} \geqslant ad + bc + 2\sqrt{acbd} = \left(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}\right)^2,$$

а также

$$\psi(f) = a^2d^2 + b^2c^2 - \left(a^2c^2f^4 + \frac{b^2d^2}{f^4}\right) \leqslant a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd = (ad - bc)^2.$$

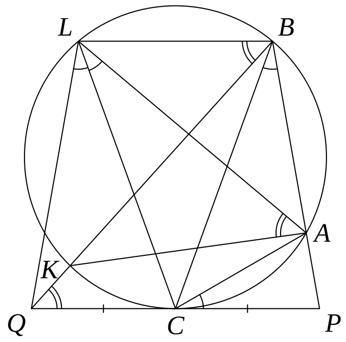
Тогда при любых $e, f > 0$

$$\psi(f) \leqslant \left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2\left(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}\right)^2 \leqslant \varphi(e). \quad \square$$

3. *Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Прямая, касающаяся ω в точке C, пересекает луч BA в точке P. На луче PC за точкой C отметили такую точку Q, что $PC = QC$. Отрезок*

BQ вторично пересекает окружность ω в точке K. На меньшей дуге BK окружности ω отметили такую точку L, что $\angle LAK = \angle CQB$. Найдите угол $\angle PCA$, если известно, что $\angle ALQ = 60°$.

Ответ: $30°$.



Решение. Вписанные углы LAK и LBK опираются на дугу LK и потому равны. В силу условия $\angle LBQ = \angle BQC$, откуда $BL \parallel PQ$. Тогда прямая ℓ, проходящая через точку C перпендикулярно касательной PQ, содержит диаметр окружности ω и перпендикулярна ее хорде BL. Значит, точки B и L симметричны относительно ℓ, то есть ℓ является осью симметрии трапеции $PQLB$. Отсюда вытекает, что $BP = LQ$ и $BC = LC$. Следовательно, треугольники QLC и PBC равны по трем сторонам, поэтому $\angle QLC = \angle ABC$. Кроме того, $\angle ALC = \angle ABC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну хорду. Тогда LC — биссектриса угла ALQ, и

$$\angle ABC = \angle ALC = \tfrac{1}{2}\,\angle ALQ = 30°.$$

Заметим теперь, что угол между хордой AC и касательной CP равен вписанному углу, опирающемуся на AC. Поэтому $\angle PCA = \angle ABC = 30°$. $\square$

4. *Какое наибольшее количество вершин правильного 2016-угольника можно отметить так, что никакие четыре отмеченные вершины не являются вершинами какого-либо прямоугольника?*

Ответ: 1009.

Решение. Заметим, что вписанный четырехугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали — диаметры описанной окружности. У 2016-угольника есть ровно 1008 пар диаметрально противоположных вершин. Если из отмеченных вершин нельзя составить прямоугольник, то только в одной паре могут быть отмечены обе вершины. Значит, всего отмечено не более $1007+2 = 1009$ вершин.

С другой стороны, занумеруем вершины 2016-угольника по порядку от 1 до 2016 и отметим первые 1009 вершин. Диаметрально противоположными будут лишь вершины с номерами 1 и 1009. Поэтому 1009 удовлетворяет условию задачи. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 6^n + 1$, где n — нечетное натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

Ответ: 7777.

Решение. Делимость x на 11 равносильна тому, что n — нечетное кратное 5, то есть $x = 6^{5m} + 1$ при некотором нечетном m. Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } \; p = 6^m + 1, \;\; q = 1 - 6^m + 6^{2m} - 6^{3m} + 6^{4m}.$$

Заметим, что p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (6^m + 1) - (6^{2m} - 1) - (6^{3m} + 1) - (6^{4m} - 1).$$

Выражения, стоящие в скобках в правой части, делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но остаток от деления p на 5 при любом m равен 2. Значит, p не кратно 5, откуда $r = 1$.

Поскольку число m нечетно, один из простых делителей p равен 7. Докажем, что число p есть степень 7 только при $m = 1$. Пусть $m \geqslant 3$ и $6^m + 1 = 7^s$. Тогда число $7^s - 1$ делится на 2^m и, тем более, на 8. Отсюда вытекает, что s четно, то есть $s = 2k$. Поэтому $2^m \cdot 3^m = (7^k - 1)(7^k + 1)$. Так как $7^k + 1$ не кратно 3, число $7^k - 1$ делится на 3^m и, значит, $7^k - 1 \geqslant 3^m$. Но тогда

$$7^k + 1 \leqslant 2^m < 3^m \leqslant 7^k - 1,$$

что невозможно.

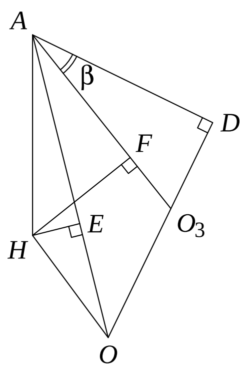
Если $m = 1$, мы получим $x = 7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, что нам подходит. Покажем, что при $m \geqslant 3$ решений не будет. Рассмотрим два случая.

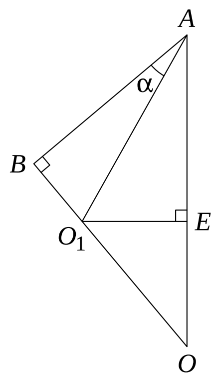
1) *p кратно 11.* Тогда $m \;\vdots\; 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 7, 11 и 101. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p есть произведение 7 и двух взаимно простых множителей, не являющихся степенями 7. Поэтому x имеет не менее четырех различных простых делителей, что невозможно.

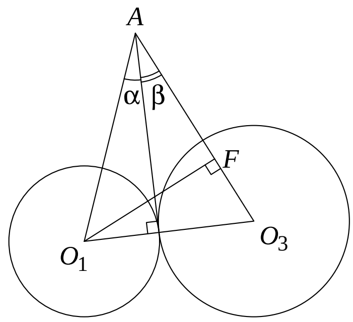
2) *q кратно 11.* Заметим, что p кратно 7 и не является степенью 7, а q взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11. Остаток от деления 6^m на 7 равен -1 ввиду нечетности m. Поэтому число q дает при делении на 8 остаток 5. Но остатки от деления 11^s на 7 принимают только значения 4, 2 и 1, поэтому q не может быть степенью 11. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $\frac{\pi}{4}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{3\pi}{4}$. Найдите угол при вершине у первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.







Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\gamma = \frac{3\pi}{8}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, имеют одинаковую длину, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно, причем $OO_1 = OO_2$. Пусть H — точка касания шаров с центрами O_1 и O_2, $\varphi = \angle HAD$. Отрезки AH, OH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A, O_1O_2O и $O_1O_2O_3$. Поэтому точки A, O, O_3, D лежат в плоскости, проходящей через точку H перпендикулярно O_1H. В частности, $AO \perp O_1H$ и $AO_3 \perp O_1H$. Значит, точки H и O_1 имеют одинаковые проекции как на прямую AO, так и на прямую AO_3 (обозначим эти проекции через E и F соответственно). Отсюда

$$AH \cdot \cos(\varphi - \gamma) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AE = AO_1 \cdot \cos(\gamma - \alpha) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\gamma - \alpha),$$

$$AH \cdot \cos(\varphi - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAF = AF = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AF = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

$$\begin{cases} \cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma = \cos\gamma + \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma, \\ \cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma\,(\cos\varphi - 1) + \sin\varphi, \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta\,(1 - \cos\varphi) - \sin\varphi. \end{cases}$$

Исключая из системы $\operatorname{tg}\alpha$, мы получим $2\sin\varphi = (1-\cos\varphi)(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\varphi)$, откуда

$$\operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}\,(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \sqrt{2},$$

поскольку

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}+1, \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}-1.$$

Теперь из второго уравнения системы

$$\operatorname{tg}\alpha = (1-\cos\varphi)\big(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2}\big) = \frac{2\big(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\big)}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\big(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\big)}{3} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 2\alpha = 2\operatorname{arctg}\tfrac{2}{3}. \quad \square$$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 6–9 классов

Вариант 1

1. *Дан такой квадратный трехчлен $f(x)$, что уравнение $(f(x))^3 - f(x) = 0$ имеет ровно три решения. Найдите ординату вершины трехчлена $f(x)$.*

Ответ: 0.

Решение. Предположим, что старший коэффициент трехчлена положителен. Заметим, что $(f(x))^3 - f(x) = f(x) \cdot (f(x) - 1) \cdot (f(x) + 1)$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет больше корней, чем уравнение $f(x) = -1$, и меньше корней, чем уравнение $f(x) = 1$. Ясно также, что никакие два уравнения не имеют общих корней. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно один корень. Следовательно, ордината вершины трехчлена $f(x)$ равна нулю. Аналогично разбирается и случай, когда старший коэффициент трехчлена отрицателен.

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли k карточек. При каком наименьшем k среди них найдутся две карточки с числами, разность корней из которых меньше 1?*

Ответ: 45.

Решение. Покажем, что $k = 45$ подходит. Разобьем числа от 1 до 2016 на 44 группы:

$$(1, 2, 3),\ (4, 5, 6, 7, 8),\ (9, 10, \ldots, 15),\ \ldots,\ (k^2, k^2 + 1, \ldots, k^2 + 2k),\ \ldots,$$
$$(1936, 1937, \ldots, 2016).$$

Поскольку чисел 45, какие-то два из них (назовем их a и b) окажутся в одной группе. Пусть для определенности $a < b$. Тогда $k^2 \leqslant a < b < (k + 1)^2$ и, следовательно, $\sqrt{b} - \sqrt{a} < (k + 1) - k = 1$.

Предъявим теперь 44 числа, все разности между корнями из которых не меньше 1:

$$1^2,\quad 2^2,\quad 3^2,\quad 4^2,\quad \ldots,\quad 44^2.$$

3. *Вещественные числа x, y и z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$ и $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leqslant \frac{1}{3}\,.$$

Решение. Действительно,

$$3\Big(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\Big)=2(x+y+z)+x-\frac{y}{2}-z\leqslant 2(x+y+z)+|x|+|y|+|z|=1.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице* 300×300 *числа* 1 *и* -1*, что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 30 000, а в каждом из прямоугольников* 3×5 *и* 5×3 *модуль суммы чисел больше 3?*

Ответ: нет.

Решение. Поскольку сумма чисел в прямоугольнике 3×5 нечетна, если ее модуль больше трех, то он хотя бы пять. Предположим, что такая расстановка нашлась. Заметим, что в ней либо нет ни одной строки, состоящей из одних $+1$, либо нет ни одного столбца, состоящего из одних -1 (если есть и такая строка, и такой столбец, то в их общей клетке с одной стороны должна стоять $+1$, с другой -1). Разберем первый случай (второй разбирается аналогично). Рассмотрим прямоугольник 3×5, расположенный в левом верхнем углу. Модуль суммы чисел в нем хотя бы 5. Сдвинем этот прямоугольник на одну клетку вправо. В нем модуль суммы чисел также хотя бы 5. Поскольку по сравнению с первым прямоугольником у него одна тройка чисел заменена на другую, суммы чисел в прямоугольниках отличаются не более, чем на 6. Но тогда они должны быть одного знака, ибо $+5$ и -5 отличаются больше, чем на 6. Сдвинем прямоугольник еще на одну клетку вправо и снова получим, что сумма чисел в нем того же знака, что и в предыдущем, и т. д.. Таким образом, мы установим, что все суммы чисел в сдвинутых вправо прямоугольниках одного знака. Тогда модуль суммы чисел в трех верхних строках не меньше, чем $60\cdot 5=300$, поскольку эти строки разбиваются на 60 таких прямоугольников. Аналогичный вывод можно сделать про любые три соседние строки.

Рассмотрим три верхние строки. Модуль суммы чисел в них не меньше, чем 300. Модуль суммы чисел в строках со второй по четвертую также не меньше, чем 300. Эти суммы должны быть одного знака, поскольку в противном случае они различаются не менее, чем на 600. С другой стороны, они отличаются не больше, чем на разность сумм чисел в первой и четвертой строке, которая не больше, чем 600, причем равенство достигается только тогда, когда в одной из строк стоят исключительно $+1$, что невозможно. Таким образом, сумма чисел в каждых трех строках также одного знака и не меньше 300 по модулю. Следовательно, во всей таблице модуль суммы чисел не меньше, чем $300\cdot 100=30\,000$. Противоречие.

5. *Дан параллелограмм* $ABCD$*. Описанная окружность* ω *треугольника* ABC *второй раз пересекает сторону* AD *и продолжение стороны* DC *в точках* P *и* Q *соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника* PDQ *лежит на* ω*.*

Решение. Трапеции $ABCP$ и $ACQD$ вписаны в окружность ω, значит, они являются равнобочными и, в частности, у них равны диагонали. Тогда $PB=AC=BQ$, и точка B лежит на серединном перпендикуляре к PQ. Обозначим точку его пересечения с окружностью ω через O. Тогда точки B и O диаметрально противоположны и, значит, $\angle BCO = 90°$. В силу равнобочности трапеции $ABCP$ и равенства противоположных сторон параллелограмма $ABCD$, имеем $PC = AB = CD$. Поэтому C лежит на серединном перпендикуляре к PD. Но CO перпендикулярно BC, а, значит, и AD. Следовательно, O также лежит на серединном перпендикуляре к PD. Итак, точка O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам PQ и PD. Стало быть, она является центром описанной окружности треугольника PDQ.

6. *Целые числа a, b и c удовлетворяют равенству $(a+3)^2+(b+4)^2-(c+5)^2 = a^2+b^2-c^2$. Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $6a + 8b - 10c = 0$. Тогда

$$5^2(a^2 + b^2 - c^2) = (5a)^2 + (5b)^2 - (3a + 4b)^2 = (4a - 3b)^2.$$

Следовательно, $4a - 3b$ делится на 5, т. е. $4a - 3b = 5k$ для некоторого целого k и

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{(4a - 3b)^2}{5^2} = k^2.$$

Вариант 2

1. *Найдите все такие многочлены $f(x)$ степени не выше второй, что для любых вещественных x и y, разность которых рациональна, разность $f(x) - f(y)$ также рациональна.*

Ответ: линейные с рациональным старшим коэффициентом или константы.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда при любом x разность

$$f(x+1) - f(x) = \big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(ax^2 + bx + c\big) = 2ax + a + b$$

рациональна. Если $a \neq 0$ это невозможно, поскольку уравнение $2ax + a + b = \sqrt{2}$ имеет решение относительно x. Стало быть, $a = 0$ и $f(x) = bx + c$. Тогда разность

$$f(2) - f(1) = (2b + c) - (b + c) = b$$

рациональна. Значит, b — рациональное число.

Осталось заметить, что все функции $f(x) = bx + c$ с рациональным b подходят, поскольку число

$$f(x) - f(y) = (bx + c) - (by + c) = b(x - y)$$

рационально для любой рациональной разности $x - y$.

2. *Какое наибольшее количество различных чисел от 1 до 1000 можно выбрать так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была равна ни одному из чисел 4, 5, 6.*

Ответ: 400.

Решение. Рассмотрим десять последовательных натуральных чисел. Докажем, что среди них выбрано не более четырех. Если выбрано хотя бы пять чисел, то три из них одной четности, но тогда их попарные разности не могут быть равны лишь 2 и 8. Действительно, если $a < b < c$, то $b - a = 2$ и $c - a = 8$, но тогда $c - b = 6$, что невозможно. Таким образом, в каждой десятке не более четырех выбранных чисел, а в первой тысяче чисел их не более 400, поскольку в тысяче сто десяток.

Если взять все числа, оканчивающиеся на 1, 2, 3 или 4, то их будет ровно 400, но никакая разность не равна 4, 5 или 6.

3. *Найдите наибольшее значение выражения*

$$\frac{a}{x} + \frac{a+b}{x+y} + \frac{a+b+c}{x+y+z},$$

где a, b, $c \in [2,3]$, а тройка чисел x, y и z есть некоторая перестановка тройки чисел a, b, c.

Ответ: $3,75$.

Решение. Докажем, что

$$\frac{a}{x}+\frac{a+b}{x+y}+\frac{a+b+c}{x+y+z}\leqslant\frac{15}{4}.$$

Заметим, что последняя дробь равна 1 и $a/x\leqslant 3/2$. Осталось показать, что $\frac{a+b}{x+y}\leqslant\frac{5}{4}$. Поскольку числа x и y — некоторая пара чисел из a, b и c, какое-то одно из них совпадает с a или с b. Таким образом, достаточно доказать, что $\frac{u+v}{v+w}\leqslant\frac{5}{4}$ для u, v, $w\in[2,3]$. Или что тоже самое, $4u\leqslant v+5w$. Но это очевидно, ибо $4u\leqslant 12\leqslant v+5w$.

Если $a=z=3$, $b=c=x=y=2$, то

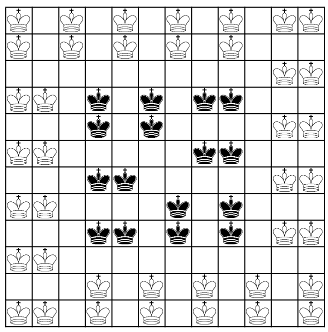
$$\frac{a}{x}+\frac{a+b}{x+y}+\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{3}{2}+\frac{3+2}{2+2}+\frac{3+2+2}{2+2+3}=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+1=\frac{15}{4}.$$

4. *Какое наибольшее количество шахматных королей можно расставить на доске* 12×12 *так, чтобы каждый король бил ровно одного из остальных?*

Ответ: 56.

Решение. Заметим, что два короля бьют друг друга тогда и только тогда, когда их клетки имеют хотя бы одну общую вершину. Для каждой пары бьющих друг друга королей отметим вершины клеток, на которых они стоят. При этом для каждой такой пары отмечено не менее шести вершин. Поскольку для разных пар королей отмечаются разные вершины (иначе бы какой-то король бил более чем одного короля) всего пар королей не более, чем $[13^2/6]=28$, а королей — не более 56.

Расстановка 56 королей показана на рисунке.



5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Из вершины B опустили перпендикуляр BO на сторону AD. Окружность ω с центром в точке O проходит через точки A, B и пересекает продолжение стороны AD в точке K. Отрезок BK пересекает сторону CD в точке L, а луч OL пересекает окружность ω в точке M. Докажите, что KM биссектриса угла BKC.*

Решение. Поскольку $OA=OB=OK$ и $\angle BOA=90^\circ$, прямоугольные треугольники ABO и BOK являются равнобедренными и, значит, $\angle BAK=\angle BKA=45^\circ$.

А по свойству углов параллелограмма $\angle KBC = \angle CDK = 45^\circ$. Тогда четырехугольник $BDKC$ вписанный. Следовательно, $\angle BKC = \angle BDC$. Поскольку $\angle BLD = \angle LDK + \angle LKD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ и $\angle BOD = 90^\circ$, четырехугольник $BLDO$ вписанный. Поэтому $\angle BDC = \angle BOM$. Осталось заметить, что $\angle BOM$ — центральный угол, опирающийся на дугу BM, а $\angle BKM$ — вписанный угол, опирающийся на дугу BM. Следовательно, $\angle BKC = \angle BDC = \angle BOM = 2\angle BKM$ и KM — биссектриса угла BKC.

6. *Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 + a$ делится на ab. Докажите, что a является точным квадратом.*

Решение. Если $n = a^2 + b^2 + a$ делится на ab, то n делится и на a. Значит, b^2 делится на a. Стало быть, $b^2 = ka$. Покажем, что a и k взаимно просты. Предположим противное. Тогда найдется такое простое число p, что a и k делятся на p. При этом b^2 делится на p и, значит, b также делится на p. Заметим далее, что $n = a^2 + b^2 + a = a^2 + ka + a$ делится на ab. Тогда $a + k + 1$ делится на b и, в частности, на p. Но это невозможно, поскольку a и k делятся на p, а 1 не делится. Итак, числа a и k взаимно просты и в произведении дают точный квадрат. Следовательно, они сами являются точными квадратами.

Вариант 3

1. *Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{3}\,)) = 0$?*

Ответ: да.

Решение. Например, подходит трехчлен $f(x) = 2x^2 - 8$. Действительно, $f(\sqrt{3}\,) = -2$, что является корнем $f(x)$.

2. *Из чисел 1, 2, 3, …, 2016 выбраны k чисел. При каком наименьшем k среди выбранных чисел обязательно найдутся два числа, разность которых больше 672 и меньше 1344?*

Ответ: 674.

Решение. Пусть $n = 672$. Тогда $2n = 1344$ и $3n = 2016$. Предположим, что можно так выбрать $674 = n + 2$ числа, что среди них не найдется нужной пары чисел. Пусть m — наименьшее из выбранных чисел. Тогда числа $m+n+1$, $m+n+2$, $\ldots$, $m+2n-1$ не выбраны. Удалим их и число m из набора $\{1, \ldots, 3n\}$, а оставшееся множество обозначим через E. Рассмотрим пары чисел

$$\begin{aligned}&(1, n+2), \quad (2, n+3), \quad \ldots (m-1, m+n),\\ &(m+1, m+2n), \quad (m+2, m+2n+1), \quad \ldots, \quad (n+1, 3n).\end{aligned}$$

Их $(m-1)+(n-m+1) = n$ штук. Заметим, что объединение левых и правых частей этих пар дает множество E. Тогда любое выбранное число совпадает с левой или правой частью одной из пар. По предположению таких чисел ровно $n+1$, поэтому найдутся два из них, например a и b, принадлежащие одной паре. Тогда их разность равна $n+1$ или $2n-1$. Значит, a и b удовлетворяют условию задачи, что невозможно.

Если выбраны числа 1, 2, 3, …, 673, то нужные два числа найти не удастся.

3. *Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x + y \leqslant 1$. Докажите, что $12xy \leqslant 4x(1-y) + 9y(1-x)$.*

Решение. Из неравенства $x + y \leqslant 1$ заключаем, что $y \leqslant 1 - x$ и $x \leqslant 1 - y$. Следовательно, по неравенству о средних для двух чисел

$$4x(1-y) + 9y(1-x) \geqslant 4x^2 + 9y^2 \geqslant 12xy.$$

4. *Дана доска* 2016×2016. *При каком наименьшем k клетки доски можно так раскрасить в k цветов, что*
1) одна из диагоналей покрашена в первый цвет;
2) клетки, симметричные относительно этой диагонали, покрашены в одинаковый цвет;

3) любые две клетки расположенные в одной строке по разные стороны от клетки первого цвета покрашены в разные цвета (клетки не обязательно соседние с клеткой первого цвета).

Ответ: 11.

Решение. Пусть в первый цвет покрашены клетки диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний. Обозначим через C_i множество цветов, в которые покрашены клетки i-й строки, расположенные левее диагонали единичного цвета. Докажем, что $C_i \neq C_j$ при $i < j$. Действительно, клетка, расположенная в i-й строке и j-м столбце, имеет цвет, не входящий в C_i. Но в такой же цвет покрашена и клетка, расположенная в j-й строке и i-м столбце, а ее цвет входит в C_j. Таким образом, множества C_1, C_2, $\ldots$, C_{2016} — различные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда их не более, чем 2^k штук. Стало быть, $k \geqslant 11$.

По индукции покажем, как требуемым образом покрасить доску $2^k \times 2^k$ в k цветов. Этого будет достаточно, поскольку, оставив лишь строки с 1-й по 2016-ю и столбцы с 1-го по 2016-й, мы получим доску 2016×2016 с требуемой покраской.

База $k = 1$ очевидна, поскольку доску 2×2 можно покрасить в один цвет. Переход от k к $k+1$. Если мы уже умеем красить требуемым образом доску $2^k \times 2^k$, то доску $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ покрасим так: разместим две копии доски $2^k \times 2^k$ одну в левом верхнем угле, другую в правом нижнем, а остальные клетки покрасим в $(k+1)$-й цвет.

5. *Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность касается стороны AC треугольника ABC, а также продолжения сторон BA и BC в точках P и S соответственно. Отрезок PS пересекает стороны DA и DC в точках Q и R. Докажите, что вписанная окружность треугольника CDA касается сторон AD и DC в точках Q и R.*

Решение. Докажем, что вписанная окружность треугольника ADC касается стороны AD в точке Q. Поскольку BP и BS — равные отрезки касательных, треугольник BPS равнобедренный, а, значит, равнобедренным является и треугольник APQ, отсекаемый от него прямой AQ, параллельной BS. Следовательно, $AP = AQ$. Снова пользуясь равенством отрезков касательных, получим, что $2BP = BP + BS = AB + BC + CA$. Стало быть,

$$AQ = AP = BP - AB = \frac{AB + BC + CA}{2} - AB = \\ = \frac{BC + CA - AB}{2} = \frac{AD + AC - CD}{2}.$$

Откуда по свойству точек касания заключаем, что Q — точка касания вписанной окружности треугольника ADC.

6. *При каких натуральных n число*

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n)!}{(n+1)!}$$

является точным квадратом? (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

Ответ: для чисел вида $n = 4k(k+1)$ и $n = 2k^2 - 1$.

Решение. Достаточно понять, при каких n число $A = (n+1)! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n)!$ является точным квадратом. Заметим, что $(2k-1)!(2k)! = 2k \cdot \big((2k-1)!\big)^2$. Поэтому

$$A = (n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot \big(1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \ldots \cdot (2n-1)!\big)^2.$$

Следовательно, число A является точным квадратом если и только, если число

$$(n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = (n+1)! \cdot 2^n \cdot n! = (n!)^2 \cdot 2^n(n+1)$$

является точным квадратом. Это равносильно тому, что число $B = 2^n(n+1)$ — точный квадрат. Если n — четно, то B является точным квадратом тогда и только тогда, когда $n+1$ — квадрат нечетного числа. Таким образом, $n+1 = (2k+1)^2$ и, значит, $n = 4k^2 + 4k$ для некоторого натурального k. Если же n — нечетно, то B является точным квадратом тогда и только тогда, когда $2(n+1)$ — квадрат четного числа. Стало быть, $2(n+1) = (2k)^2$ и, значит, $n = 2k^2 - 1$ для некоторого натурального k.

Вариант 4

1. *Квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $[f(x)] = [g(x)]$ при всех x. Докажите, что $f(x) = g(x)$ при всех x. (Здесь $[a]$ означает целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a).*

Решение. Пусть $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c$. Из равенства $[f(x)] = [g(x)]$ следует, что $|h(x)| = |f(x) - g(x)| \leqslant 1$. Но квадратный трехчлен принимает сколь угодно большие по модулю значения. Следовательно, $a = 0$. С другой стороны, при $b \neq 0$ значение $|bx + c|$ в точке $-c/b + 2/b$ равно двум, поэтому и $b = 0$. Стало быть, $f(x) = g(x) + c$. Пусть $c \neq 0$. Можно считать, что $c > 0$ (иначе поменяем местами трехчлены f и g). Рассмотрим такое целое число n, которое является значением многочлена $f(x)$ в некоторой точке. Обозначим эту точку через x_0. Тогда $g(x_0) = f(x_0) - c < f(x_0) = n$ и, значит, $[g(x_0)] < n = [f(x_0)]$.

2. *На встрече любителей кактусов 80 кактусофилов представили свои коллекции, каждая из которых состоит из кактусов разных видов. Оказалось, что ни один вид кактусов не встречается во всех коллекциях сразу, но у любых 15 человек есть кактусы одного и того же вида. Какое наименьшее общее количество видов кактусов может быть во всех коллекциях?*

Ответ: 16.

Решение. Покажем, что 16 кактусов могло быть. Занумеруем кактусы числами от 1 до 16. Пусть у 1-го кактусофила есть все кактусы, кроме первого; у 2-го — все, кроме второго кактуса; у 15-го — все, кроме пятнадцатого кактуса; а у кактусофилов с 16-го по 80-го есть все кактусы, кроме шестнадцатого. Тогда у любых 15 кактусофилов найдется общий вид кактусов.

Установим теперь, что у них должно быть больше 15 кактусов. Предположим противное: пусть всего у них $k \leqslant 15$ кактусов. Занумеруем кактусы числами от 1 до k. Для кактуса с номером i найдется кактусофил A_i, у которого его нет. Но тогда для кактусофилов A_1, A_2, …, A_k нет кактуса, который был бы у всех. И, тем более, нет такого кактуса, если мы к ним добавим еще нескольких кактусофилов так, чтобы их количество стало равно 15. Противоречие.

3. *Для положительных чисел x и y докажите неравенство*

$$1 \leqslant \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{9}{8}.$$

Решение. Левое неравенство равносильно неравенству $(x^2+y^2)^2 \leqslant (x+y)(x^3+y^3)$, которое после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и деления на xy

сводится к неравенству $2xy \leqslant x^2 + y^2$. Домножим обе части правого неравенства на $(x^2+y^2)^2$. Получим неравенство

$$x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 = (x+y)(x^3+y^3) \leqslant (x^2+y^2)^2 + \frac{(x^2+y^2)^2}{8}\,.$$

Раскроем скобки в $(x^2+y^2)^2$ и сократим на x^4+y^4. Тогда получим неравенство

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2+y^2) \leqslant 2x^2y^2 + \frac{(x^2+y^2)^2}{8}\,.$$

Оно непосредственно следует из неравенства о средних для двух чисел.

4. *Клетки доски* 2015×2015 *раскрашены в шахматном порядке так, что угловые клетки черные. На одну из черных клеток поставлена фишка, а некоторая другая черная клетка отмечена. За ход разрешается переместить фишку на соседнюю клетку. Всегда ли можно обойти фишкой все клетки доски, побывав на каждой из них ровно по одному разу, и закончить обход в отмеченной клетке? (Две клетки являются соседними, если имеют общую сторону.)*

Ответ: да.

Решение. Индукцией по n докажем, что для любых двух черных клеток A и B доски $(2n+1)\times(2n+1)$ найдется путь фишки, начинающийся в A, проходящий по всем клеткам доски и заканчивающийся в B.

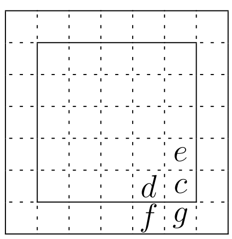
База $n=1$. Возможны два размещения черных клеток A и B: в соседних угловых клетках и в противоположных угловых клетках. С точностью до поворота доски они разобраны на рисунках.

1	2	3
8	7	4
9	6	5

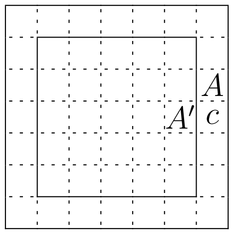
1	2	3
6	5	4
7	8	9

Переход от n к $n+1$.

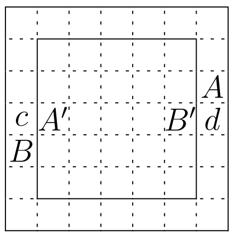
Если клетки A и B можно накрыть доской $(2n+1)\times(2n+1)$, ни один из углов которой не совпадает с углом доски $(2n+3)\times(2n+3)$, то подправим путь фишки из A в B, обходящий доску $(2n+1)\times(2n+1)$, следующим образом. В какой-то момент путь попадет в вершину, помеченную на рисунке буквой c. Тогда с точностью до симметрии фишка шла по маршруту $d \to c \to e$. Перенаправим ее из d в f, затем по часовой стрелке по каемке доски до g и потом в c.



Если так накрыть клетки A и B нельзя, то хотя бы одна из них находится на границе доски $(2n+3)\times(2n+3)$. Пусть для определенности это клетка A (в противном случае A и B можно поменять ролями, рассмотрев обратный путь). Если клетка B расположена не на краю, то сделаем обход таким образом. От клетки A пойдем по каемке против часовой стрелки до клетки c, затем на клетку A' и после этого по маршруту от A' до B, который существует по предположению индукции.



Если же клетка B также расположена на краю, то сделаем обход иначе. Отметим следующую за B по часовой стрелке клетку c и соседнюю с ней черную клетку в квадрате $(2n+1)\times(2n+1)$ — клетку A'. Также отметим следующую за A по часовой стрелке клетку d и соседнюю с ней черную клетку в квадрате $(2n+1)\times(2n+1)$ — клетку B'. Клетки c и d не могут оказаться угловыми, поскольку они белые, а угловые клетки по условию черные. От клетки A пойдем по каемке против часовой стрелки до клетки c, затем на клетку A' и после этого по маршрту от A' до B', потом на d и дальше по каемке до B.



5. *Дан параллелограмм $ABCD$ с углом $\angle B$, равным 60°. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая BO пересекает биссектрису внешнего угла $\angle D$ в точке E. Найдите отношение $\frac{BO}{OE}$.*

Ответ: $1/2$.

Решение. Пусть P — отличная от C точка пересечения описанной окружности треугольника ABC с прямой CD, а F диаметрально противоположная точка для точки B. Тогда $ABCP$ — вписанная трапеция. Значит, она равнобочная и $\angle APD = \angle BAP = \angle ABC = 60^\circ$. Следовательно,

$$\angle PAD = \angle BAD - \angle BAP = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ.$$

Стало быть, $AD = DP$. А поскольку еще и $OA = OP$, прямые AP и OD перпендикулярны. Кроме того, DO — биссектриса угла $\angle ADC$. Тогда DO и DE перпендикулярны как биссектрисы внешнего и внутреннего углов. Пусть Q — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда $AQ = QC$ и, значит, OQ — высота равнобедренного треугольника AOC с углом $120°$. Тогда $\angle OAC = 30°$ и, значит, $OQ = \frac{OA}{2}$. С другой стороны OQ — средняя линия треугольника BDF. Поэтому $OQ = \frac{DF}{2}$ и $DF = OA = OF$. Поскольку треугольник ODE прямоугольный, F — середина его гипотенузы. Таким образом, $OE = 2OF = 2OB$.

6. *Натуральные числа a и b таковы, что a^3+b^3+ab делится на $ab(a-b)$. Докажите, что НОК(a,b) является точным квадратом. (НОК — наименьшее общее кратное).*

Решение. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Положим $a = da_1$ и $b = db_1$. Тогда числа a_1 и b_1 взаимно просты, $\text{НОК}(a,b) = da_1b_1$, а делимость a^3+b^3+ab на $ab(a-b)$ влечет делимость числа $n = da_1^3 + db_1^3 + a_1b_1$ на $da_1b_1(a_1-b_1)$ и, в частности, делимость на d. Следовательно, a_1b_1 делится на d. Заметим, что n делится на a_1 и, значит, db_1^3 делится на a_1. Но поскольку числа a_1 и b_1 взаимно просты, d делится на a_1. Аналогично проверяется, что d делится на b_1. Снова используя взаимную простоту чисел a_1 и b_1, получаем, что d делится на a_1b_1. Таким образом, $d = a_1b_1$. Стало быть, $\text{НОК}(a,b) = da_1b_1 = d^2$.

Вариант 5

1. *Дан такой квадратный трехчлен $f(x)$, что уравнение $(f(x))^3 - 4f(x) = 0$ имеет ровно три решения. Сколько решений имеет уравнение $(f(x))^2 = 1$.*

Ответ: 2.

Решение. Предположим, что старший коэффициент трехчлена положителен. Заметим, что $(f(x))^3 - 4f(x) = f(x) \cdot (f(x) - 2) \cdot (f(x) + 2)$. Уравнение $f(x) = 0$ имеет больше корней, чем уравнение $f(x) = -2$, и меньше корней, чем уравнение $f(x) = 2$. Ясно также, что никакие два уравнения не имеют общих корней. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно один корень. Следовательно, уравнение $f(x) = 1$ имеет ровно два корня, а уравнение $f(x) = -1$ корней не имеет. Стало быть, уравнение $(f(x))^2 - 1 = (f(x) + 1)(f(x) - 1) = 0$ имеет два корня. Аналогично разбирается и случай, когда старший коэффициент трехчлена отрицателен.

2. *На 2016 карточках написали числа от 1 до 2016 (каждое по одному разу). Затем взяли k карточек. При каком наименьшем k среди них найдутся две карточки с такими числами a и b, что $\left|\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right| < 1$?*

Ответ: 13.

Решение. Покажем, что $k = 13$ подходит. Разобьем числа от 1 до 2016 на 12 групп:

$$\begin{gathered}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),\ \ (8, 9, \dots, 26),\ \ (27, 28, \dots, 63),\ \ \dots, \\ (k^3, k^3 + 1, \dots, (k + 1)^3 - 1),\ \ \dots, (1728, 1729, \dots, 2016).\end{gathered}$$

Поскольку чисел 13, какие-то два из них (назовем их a и b) окажутся в одной группе. Пусть для определенности $a < b$. Тогда $k^3 \leqslant a < b < (k + 1)^3$ и, следовательно, $0 < \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} < (k + 1) - k = 1$.

Предъявим теперь 12 чисел, все разности между кубическими корнями из которых не меньше 1:

$$1^3, \quad 2^3, \quad 3^3, \quad 4^3, \quad \dots, \quad 12^3.$$

3. *Вещественные числа x, y и z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$ и $|x| + |y| + |z| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} \leqslant \frac{2}{5}\,.$$

Решение. Действительно,

$$5\Big(x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\Big) = 3(x + y + z) + 2x - \frac{4y}{3} - 2z \leqslant 3(x + y + z) + 2(|x| + |y| + |z|) = 2.$$

4. *Можно ли так расставить в таблице 600×600 числа 1 и -1, что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 90 000, а в каждом из прямоугольников 4×6 и 6×4 модуль суммы чисел больше 4?*

Ответ: нет.

Решение. Поскольку сумма чисел в прямоугольнике 4×6 четна, если ее модуль больше четырех, то он хотя бы шесть. Предположим, что такая расстановка нашлась. Заметим, что в ней либо нет ни одной строки, состоящей из одних $+1$, либо нет ни одного столбца, состоящего из одних -1 (если есть и такая строка, и такой столбец, то в их общей клетке с одной стороны должна стоять $+1$, с другой -1). Разберем первый случай (второй разбирается аналогично). Рассмотрим прямоугольник 4×6, расположенный в левом верхнем углу. Модуль суммы чисел в нем хотя бы 6. Сдвинем этот прямоугольник на одну клетку вправо. В нем модуль суммы чисел также хотя бы 6. Поскольку по сравнению с первым прямоугольником у него одна четверка чисел заменена на другую, суммы чисел в прямоугольниках отличаются не более, чем на 8. Но тогда они должны быть одного знака, ибо $+6$ и -6 отличаются больше, чем на 8. Сдвинем прямоугольник еще на одну клетку вправо и снова получим, что сумма чисел в нем того же знака, что и в предыдущем, и т. д.. Таким образом, мы установим, что все суммы чисел в сдвинутых вправо прямоугольниках одного знака. Тогда модуль суммы чисел в четырех верхних строках не меньше, чем $100 \cdot 6 = 600$, поскольку эти строки разбиваются на 100 таких прямоугольников. Аналогичный вывод можно сделать про любые четыре соседние строки.

Рассмотрим четыре верхние строки. Модуль суммы чисел в них не меньше, чем 600. Модуль суммы чисел в строках со второй по пятую также не меньше, чем 600. Эти суммы должны быть одного знака, поскольку в противном случае они различаются не менее, чем на 1200. С другой стороны, они отличаются не больше, чем на разность сумм чисел в первой и пятой строке, которая не больше, чем 1200, причем равенство достигается только тогда, когда в одной из строк стоят исключительно $+1$, что невозможно. Таким образом, сумма чисел в каждых трех строках также одного знака и не меньше 600 по модулю. Следовательно, во всей таблице модуль суммы чисел не меньше, чем $600 \cdot 150 = 90\,000$. Противоречие.

5. *Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) вписана в окружность ω. На луче DC за точкой C отмечена такая точка E, что $BC = BE$. Прямая BE вторично пересекает окружность ω в точке F, лежащей вне отрезка BE. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CEF лежит на ω.*

Решение. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω, значит, она является равнобочной и, в частности, ее диагонали равны. Тогда $AC = BD$ и $\angle BCD = \angle ADC$. Поскольку треугольник BCE равнобедренный,

$$\angle BEC = \angle BCE = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle ADC\,.$$

Следовательно, прямые BE и AD параллельны. Тогда $ADBF$ — вписанная трапеция, значит, она является равнобочной и, в частности, $BD = AF$. Таким образом, $AC = BD = AF$, и точка A лежит на серединном перпендикуляре к CF. Обозначим точку его пересечения с окружностью ω через O. Тогда точки A и O диаметрально противоположны и, значит, $\angle ABO = 90°$. Поскольку треугольник BCE равнобедренный, точка B лежит на серединном перпендикуляре к CE. Но BO перпендикулярно AB, а, значит, и CE. Следовательно, O также лежит на серединном перпендикуляре к CE. Итак, точка O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам CE и CF. Стало быть, она является центром описанной окружности треугольника CEF.

6. *Целые числа a, b и c удовлетворяют равенству $(a-5)^2+(b-12)^2-(c-13)^2 = a^2+b^2-c^2$. Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.*

Решение. Раскрыв скобки в условии, получим, что $10a + 24b - 26c = 0$. Тогда

$$13^2(a^2 + b^2 - c^2) = (13a)^2 + (13b)^2 - (5a + 12b)^2 = (12a - 5b)^2.$$

Следовательно, $12a - 5b$ делится на 13, т. е. $12a - 5b = 13k$ для некоторого целого k и

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{(12a - 5b)^2}{13^2} = k^2.$$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2015/2016 учебный год

Задания для 10-11 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2015/2016 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Из указанных ниже парабол выберите те, по отношению к которым точки $A(-1,\,-1)$ и $B(0,\,2)$ лежат по одну сторону*

а) $y = 2x^2 + 4x$;

б) $y = x^2/2 - x - 3/2$;

в) $y = -x^2 + 2x - 1$;

г) $y = -x^2 - 4x - 3$;

д) $y = -x^2 + 3$;

е) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: а), в) и д).

Решение. Преобразуем уравнения парабол, выделив полный квадрат:

1) $2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$ — вершиной параболы является точка с координатами $(-1,\,-2)$, ветви данной параболы направлены вверх; легко видеть, что обе заданные точки лежат внутри параболы;
2) $x^2/2 - x - 3/2 = (x-1)^2/2 - 2$ — в этом случае вершиной является точка $(1,\,-2)$, ветви также направлены вверх, но левая ветвь пересекает ось абсцисс в точке -1, таким образом, заданные точки лежат по разные стороны от параболы;
3) $-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$ — вершина находится в точке $(1,\,0)$, ветви направлены вниз, левая ветвь пересекает ось ординат в точке -1, следовательно, обе заданные точки лежат снаружи параболы;
4) $-x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1$ — вершина в точке $(-2,\,1)$, ветви направлены вниз, правая ветвь пересекает ось абсцисс в точке -1, поэтому заданные точки лежат по разные стороны от параболы;
5) у параболы $-x^2+3$ вершина находится в точке $(0,\,3)$, ветви направлены вниз, так что и в этом случае обе заданные точки лежат внутри параболы.

2. (10 баллов) *В треугольнике ABC проведены медианы AM и BK. Известно, что $AM = 3$, $BK = 5$. Определите, какое из перечисленных утверждений является верным:*

а) длина стороны AB может быть равна 6;

б) периметр треугольника ABC может быть равен 22;

в) по данным задачи невозможно оценить ни периметр треугольника, ни сторону AB;

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: г).

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан. Как известно, точкой пересечения медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому $BO = 10/3$, $OK = 5/3$, $AO = 2$, $OM = 1$. Проанализируем теперь сформулированные в задаче утверждения.

Случай а). Воспользуемся неравенством треугольника для AOB: $AB < AO + OB = 16/3 < 6$. Следовательно, утверждение этого пункта неверно.

Случай б). Здесь для оценки периметра воспользуемся неравенством треугольника для BOM и AOK:

$$AB + BC + CA = AB + 2BM + 2AK < \frac{16}{3} + 2\cdot\frac{11}{3} + 2\cdot\frac{13}{3} = 21\frac{1}{3} < 22.$$

Поэтому утверждение этого пункта также неверно.

Случай в). Воспользовавшись неравенством треугольника, можно получить оценки сверху и для стороны AB, и для периметра. Утверждение неверно.

Отсюда получаем истинность утверждения пункта г).

3. (20 баллов) *Будем говорить, что число имеет вид $\overline{aba}$, если у него первая и третья цифра одинаковы; вторая при этом обязана быть другой. Например, 101 и 292 имеют такой вид, а 222 и 123 не имеют. Аналогичным образом определим вид числа $\overline{abcabd}$. Сколько нечётных чисел вида $\overline{adabcd}$ делятся на 5?*

Ответ: 448.

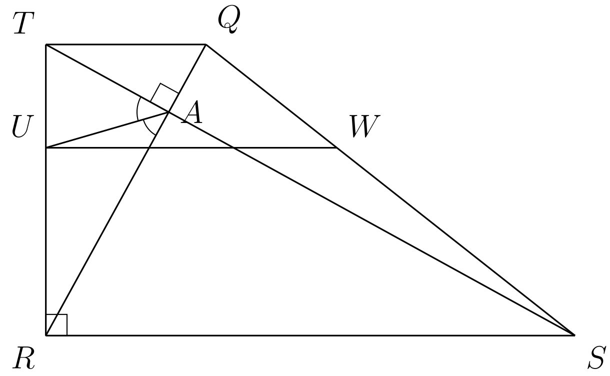
Решение. Нечётные числа, делящиеся на 5, — это числа, оканчивающиеся на 5, таким образом, для d имеем только один вариант. Для a имеем 8 вариантов, так как число не может начинаться с нуля, также a не может быть равно d. Цифра b не может быть равна a или d, и других ограничений на неё нет — получаем 8 вариантов значений. Аналогично, для цифры c — 7 вариантов. Отсюда получаем, что искомых чисел всего $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

4. (20 баллов) *График некоторой четной функции проходит через точки с координатами $(-1;\,0)$, $(0{,}5;\,2{,}5)$ и $(3;\,0)$. Укажите пример формулы, которая описывает такую функцию (достаточно дать только ответ, решение приводить не нужно).*

Ответ: Например,

$$f(x) = \begin{cases} 2{,}5 & \text{при } x = \pm\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } x \in \left(-\infty,\, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\, +\infty\right). \end{cases}$$

5. (30 баллов) *Диагонали трапеции $RSQT$ с основаниями RS и QT пересекаются в точке A под прямым углом. Известно, что основание RS больше основания QT и угол R прямой. Биссектриса угла RAT пересекает RT в точке U, а прямая, проходящая через точку U параллельно RS, пересекает прямую SQ в точке W. Докажите, что $UW = RT$.*



Первое решение. Найдем выражение для UW, используя равенство площадей трапеций:

$$S_{RTQS} = S_{RUWS} + S_{UTQW} \Leftrightarrow$$
$$(RS + TQ) \cdot (TU + UR) = (RS + UW) \cdot UR + (UW + TQ) \cdot TU \Leftrightarrow$$
$$RS \cdot TU + TQ \cdot UR = UW \cdot (UR + TU) \Leftrightarrow$$
$$UW = \frac{RS \cdot TU}{TR} + \frac{TQ \cdot UR}{TR}\,.$$

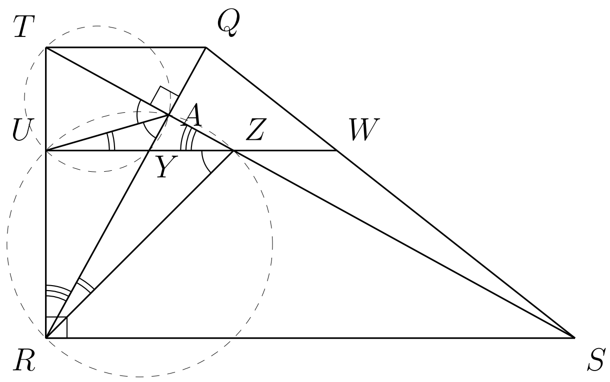
Нетрудно видеть, что треугольники QAT, QTR, TAR, TRS и RAS подобны по трем углам (все они прямоугольные и, кроме того, треугольники QTA и RTQ имеют общий угол RQT, треугольники RTQ и TAR — общий угол TRA, треугольники TAR и TRS — общий угол TSR). Отсюда получаем, что $\frac{AT}{AR} = \frac{TR}{RS} = \frac{TQ}{TR}$. По условию AU — биссектриса угла A в треугольнике TAR, поэтому верно равенство $\frac{UT}{UR} = \frac{AT}{AR}$.

Подставим полученные соотношения в выражение для UW:

$$UW = \frac{RS}{TR} \cdot UT + \frac{TQ}{TR} \cdot UR =$$
$$= \frac{RS}{TR} \cdot \frac{TR \cdot UR}{RS} + \frac{TQ}{TR} \cdot \frac{UT \cdot TR}{TQ} =$$
$$= UR + UT = TR\,.$$

Второе решение. Обозначим через Y — пересечение RQ и UW, а через Z — пересечение ST и UW. Рассмотрим четырехугольник $UTAY$: у него углы U и

A равны $90°$, поэтому вокруг него можно описать окружность; а поскольку AU — биссектриса, то $UT = UY$.



Рассмотрим четырехугольник $RUAZ$: он образован двумя прямоугольными треугольниками (RUZ и RAZ), имеющими общую гипотенузу, т.е. вокруг него тоже можно описать окружность. Нетрудно видеть, что $\angle UAR = \angle UZR$, $\angle URA = \angle UZA$, $\angle AUZ = \angle ARZ$, а $\angle AUZ + \angle AZU = \angle UAT$ (из треугольника UAZ). Следовательно, в треугольнике RUZ равны углы ZRU и RZU, а поэтому равны и стороны UR и UZ. Осталось заметить, что $UY = ZW$, т.к. коэффициент подобия треугольников RUY и RTQ равен коэффициенту подобия треугольников SWZ и SQT.

Таким образом, $UW = UZ + ZW = RU + UY = RU + UT = RT$.

6. (30 баллов) *В треугольнике XYZ сторона YZ в два раза больше стороны XZ. На стороне YZ выбрана точка W так, что углы ZXW и ZYX равны. Прямая XW пересекает биссектрису внешнего угла при вершине Z в точке A. Докажите, что угол YAZ прямой.*

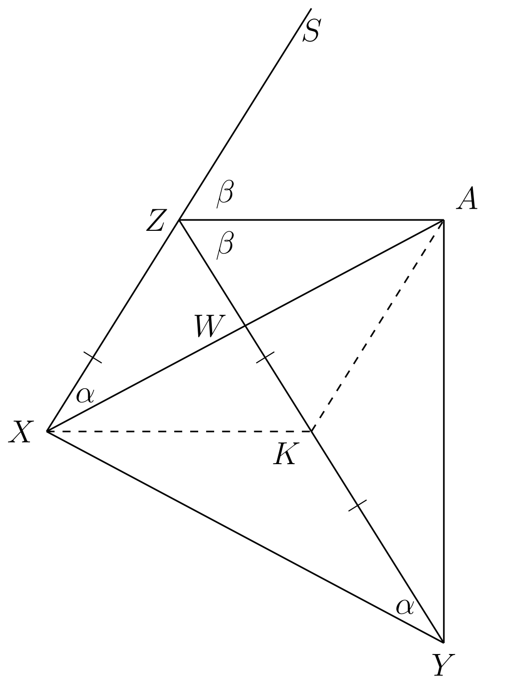
Решение. Заметим, что треугольники ZWX и ZXY подобны по двум углам (угол Z общий, а углы α равны по условию). Отсюда получаем, что

$$\frac{WZ}{ZX} = \frac{ZX}{ZY} = \frac{XW}{XY} = \frac{1}{2},$$

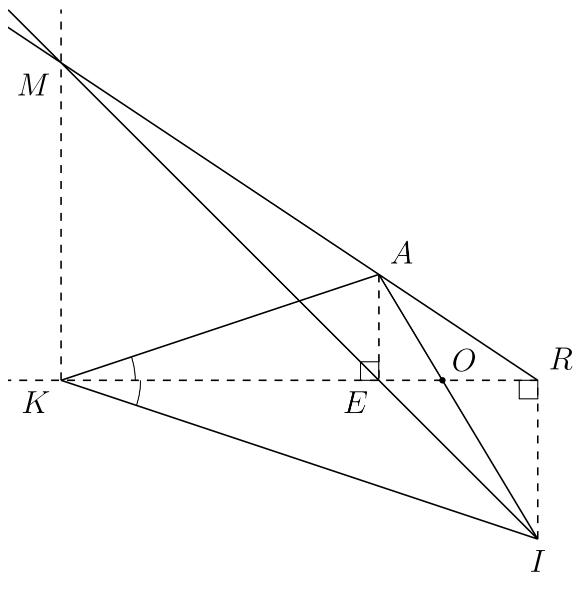
т.е. $ZW = \frac{1}{4}ZY$.

Пусть XK — биссектриса угла WXY, точка K лежит на WY. Тогда $\frac{KW}{KY} = \frac{XW}{XY} = \frac{1}{2}$, т.е. $KW = \frac{1}{3}YW = \frac{1}{4}YZ$ и $ZK = KY$. Далее, пусть S — точка на продолжении отрезка XZ за точку Z. По условию, $\angle SZA = \frac{1}{2}(\angle ZXY + \angle XYZ) = \angle ZXK$. Следовательно, $XK \parallel ZA$, и поэтому треугольники XWK и ZWA равны по второму признаку ($ZW = WK$, $\angle XWK = \angle ZWA$ как вертикальные, $\angle XKW = \angle WZA$ как накрест лежащие при параллельных прямых). Отсюда получаем, что $XK = ZA$, а это дает равенство треугольников XZK и ZKA по первому признаку.

Следовательно, $KA = XZ$, т.е. мы получили, что $KA = KZ = KY$. Поэтому треугольник YAZ — прямоугольный с прямым углом A.



7. (30 баллов) *В треугольнике KIA сторона KA меньше стороны KI, а точки R и E — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла K из точек I и A соответственно. Докажите, что прямые IE, RA и перпендикуляр к KR, восстановленный в точке K, пересекаются в одной точке.*



Решение. Обозначим через M точку пересечения прямых IE и RA; она существует, т.к. по условию $KA < KI$ и, следовательно, $AE \neq RI$ и $AEIR$ не параллелограмм. И пусть O — точка пересечения биссектрисы угла K со стороной AI. Нетрудно видеть, что треугольники KAE и ARI подобны — они прямоугольные, а KR — биссектриса. Отсюда, $\frac{KA}{KI} = \frac{KE}{KR} = \frac{AE}{IR} = k$. Также $\frac{AO}{OI} = \frac{KA}{KI} = k$, т.к. KR —

биссектриса. Поскольку $AE \parallel RI$, то треугольники MAE и MRI подобны, и поэтому

$$\frac{AE}{RI} = \frac{MA}{MR} = \frac{ME}{MI} = k.$$

Теперь рассмотрим треугольники MKR и AER. У них угол R общий,

$$\frac{ER}{KR} = \frac{KR - KE}{KR} = 1 - k,$$

$$\frac{AR}{MR} = \frac{MR - MA}{MR} = 1 - k.$$

Следовательно, эти треугольники подобны и поэтому $\angle MKR = \angle AER = 90^\circ$.

8. (40 баллов) *На полоске написали по порядку числа от 1 до 1598 и разрезали её на несколько частей. Оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному числу n, второй части — числу $2n$, третьей — числу $3n$ и т.д. Объясните при каких n это возможно.*

Решение. Рассмотрим несколько подряд идущих натуральных чисел. Если их четное количество, то они разбиваются на пары с равной нечетной суммой, следовательно их среднее арифметическое не является целым числом. Если же их нечетное количество, то их средним арифметическим является среднее число из этого набора. Откуда все части полоски состоят из нечетного количества чисел.

Среднее арифметическое чисел от 1 до k равно натуральному n, следовательно $k = 2n - 1$. Таким образом, первая полоска состоит из чисел от 1 до $2n - 1$, тогда вторая полоска состоит из единственного числа $2n$, первым числом третьей полоски является $2n + 1$, тогда последним $4n - 1$ (сумма крайних чисел должна равняться $6n$), тогда следующим числом будет $4n$, потом от $4n + 1$ до $6n - 1$ и так далее.

Таким образом, у нас чередуются последние числа полосок: $2n-1$, $2n$, $4n-1$, $4n$, $6n-1$, $6n$, $\ldots$, $2kn-1$, $2kn$. Так как число 1598 четное и является последним числом в некоторой полоске, то оно равно некоторому $2kn$. Откуда $kn = 799 = 17 \cdot 47$, то есть n может быть одним из делителей этого числа: 1, 17, 47, 799. Из решения ясно, что соответствующие примеры для каждого такого n найдутся.

9. (40 баллов) *Числа $s_1, s_2, \ldots, s_{1008}$ таковы, что их сумма равна 2016^2. Известно, что*

$$\frac{s_1}{s_1 + 1} = \frac{s_2}{s_2 + 3} = \frac{s_3}{s_3 + 5} = \ldots = \frac{s_{1008}}{s_{1008} + 2015}.$$

Найдите s_{17}.

Ответ: 132.

Решение. Заметим, что ни одно из s_i не равно нулю (иначе бы равнялись нулю все дроби $\frac{s_i}{s_i+2i-1}$, и, следовательно, все s_i должны были бы быть равны нулю, что противоречит тому, что их сумма равна 2016^2). Поэтому исходное условие равносильно условию

$$\frac{s_1+1}{s_1}=\frac{s_2+3}{s_2}=\frac{s_3+5}{s_3}=\ldots=\frac{s_{1008}+2015}{s_{1008}}\Leftrightarrow\frac{1}{s_1}=\frac{3}{s_2}=\frac{5}{s_3}=\ldots=\frac{2015}{s_{1008}}.$$

Из первого равенства выразим s_2 через s_1: $s_2=3s_1$; далее, аналогично, s_3 через s_1: $s_3=5s_1$; $\ldots s_{1008}=2015s_1$. Теперь имеем

$$\sum_{i=1}^{1008}s_i=\sum_{i=1}^{1008}(2i-1)s_1=s_1\cdot\frac{(1+2015)\cdot 1008}{2}=1008^2s_1=2016^2.$$

Отсюда $s_1=4$ и, следовательно, $s_{17}=(2\cdot 17-1)\cdot 4=132$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2015/2016 учебный год

Задания для 6-9 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2015/2016 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *Оцените значение отношения чисел* A *и* B*, если*

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 3 \cdot 6 \cdot 21 + 4 \cdot 8 \cdot 28\,,$$

$$B = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 9 \cdot 15 + 4 \cdot 12 \cdot 20\,.$$

а) $0 < A/B < 1$*;*

б) $1 < A/B < 10$*;*

в) $10 < A/B < 100$*;*

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: а).

Решение. Нетрудно видеть, что и в числе A, и в числе B второе слагаемое в два раза больше первого, третье — в три раза, а четвертое — в четыре. Таким образом, отношение A к B равно отношению их первых слагаемых. Это отношение равно $\frac{14}{15}$, что меньше 1.

2. (10 баллов) *Определите, сколько простых делителей имеет число* $17! - 15!$ *(здесь* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ *— факториал числа* n*, т.е. произведение всех натуральных чисел от 1 до* n *включительно).*

а) 6*;*

б) 7*;*

в) 8*;*

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: б).

Решение. Преобразуем: $17! - 15! = 15!\,(16 \cdot 17 - 1) = 15! \cdot 271$. Простыми делителями этого числа являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 271.

3. (20 баллов) *Будем говорить, что число имеет вид* $\overline{aba}$, *если у него первая и третья цифра одинаковы; вторая при этом не обязана быть другой. Например, 101 и 222 имеют такой вид, а 220 и 123 не имеют. Аналогичным образом определим вид числа* $\overline{ababc}$. *Сколько чисел вида* $\overline{ababc}$ *делятся на 5?*

Ответ: 180.

Решение. Числа, делящиеся на 5, — это числа, оканчивающиеся на 0 или 5, таким образом, для c имеем два варианта. Для a имеем 9 вариантов, так как число не может начинаться с нуля, значение же b может быть любым.

Отсюда получаем, что искомых чисел всего $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$.

4. (20 баллов) *Незнайка придумал для своей электронной почты пароль, состоящий из пяти символов. Решив проверить надёжность этого пароля, он подсчитал все возможные комбинации, которые можно составить из данных пяти символов. В итоге получилось 20 различных комбинаций. Возможен ли пароль с таким числом комбинаций, или Незнайка ошибся в подсчётах? Если возможен, то приведите какой-нибудь пример подходящего пароля.*

Ответ: Например, $error$.

Решение. Максимальное число различных комбинаций, которое можно составить из 5 символов, равняется $5!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — факториал числа n, т.е. произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно). Такое число получается в случае, когда все эти 5 символов различны.

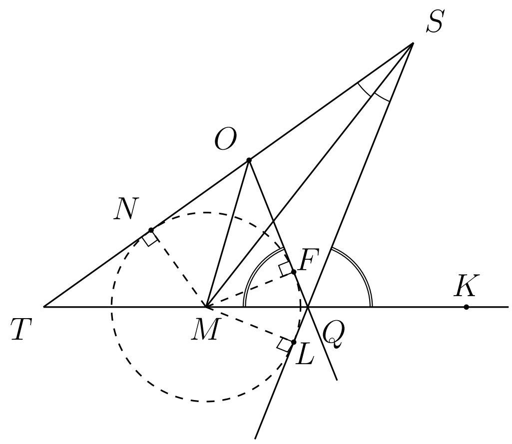
Пусть среди данных 5 символов имеется $k \leqslant 5$ одинаковых. Рассмотрим произвольную комбинацию этих символов. Очевидно, перестановка в рассматриваемой комбинации любых двух одинаковых символов между собой при оставлении на своих местах остальных символов не дает новой комбинации. Всего таких престановок между одинаковыми символами может быть $k!$. Таким образом, каждая комбинация символов, не являющихся одинаковыми, повторяется $k!$ раз. Значит, общее число различных комбинаций будет $5!/k!$. Аналогично, если помимо k одинаковых символов имеется еще n других одинаковых символов, то общее число различных комбинаций равняется $5!/(k! \cdot n!)$.

Нетрудно видеть, что 20 различных комбинаций получается при $k = 3$, $n = 1$.

5. (20 баллов) *Представьте число 2015 в виде суммы трех целых чисел, одно из которых простое, другое делится на 3, а третье число принадлежит интервалу (400; 500) и не делится на 3 (достаточно дать только ответ, решение приводить не нужно).*

Ответ: Например, $2015 = 7 + 1605 + 403$.

6. (30 баллов) *SM — биссектриса в треугольнике SQT. Точка O на стороне ST такова, что угол OQT равен сумме углов QTS и QST. Докажите, что OM — биссектриса угла QOT.*



Первое решение. Заметим, что $\angle QTS + \angle QST = \angle SQK$, где K лежит на продолжении отрезка TQ за точку Q. По условию, точка O лежит между T и S, значит, $\angle OQT = \angle SQK < 90^\circ$, и поэтому F — проекция точки M на прямую OQ — лежит на отрезке OQ. Аналогично, угол $TQS > 90^\circ$ и, следовательно, точка L — проекция точки M на прямую SQ — лежит за пределами отрезка SQ.

Угол MQL является вертикальным к углу SQK и поэтому равен углу OQT. Отсюда получаем, что прямоугольные треугольники MQF и MQL равны, т.е. $ML = MF$. Но, по условию, $ML = MN$ (так как SM биссектриса), следовательно, $MF = MN$ и OM является биссектрисой угла QOT.

Второе решение. По теореме синусов для треугольника TQO имеем

$$\frac{\sin\angle TQO}{TO} = \frac{\sin\angle QTO}{QO},$$

а для треугольника TQS —

$$\frac{\sin\angle TQS}{TS} = \frac{\sin\angle QTS}{TS}.$$

По условию, SM — биссектриса, следовательно

$$\frac{MT}{MQ} = \frac{ST}{SQ},$$

а

$$\angle OQT = \angle QTS + \angle QST = \angle KQS = \pi - \angle TQS,$$

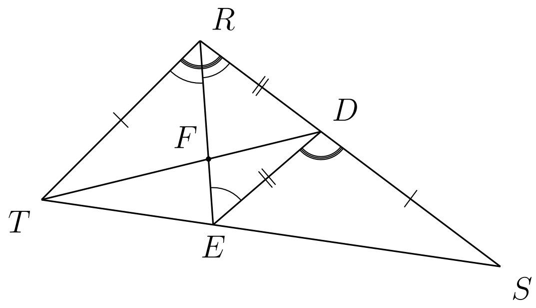
поэтому $\sin\angle TQO = \sin\angle TQS$.

Отсюда получаем, что

$$\frac{MT}{MQ} = \frac{ST}{SQ} = \frac{\sin\angle TQS}{\sin\angle QTS} = \frac{\sin\angle TQO}{\sin\angle QTO} = \frac{OT}{OQ}.$$

Таким образом, OM — биссектриса угла O в треугольнике TOQ.

7. (30 баллов) *Пусть RE — биссектриса треугольника RST. Точка D на стороне RS такова, что $ED \parallel RT$, F — точка пересечения TD и RE. Докажите, что если $SD = RT$, то $TE = TF$.*



Решение. Поскольку $DE \parallel RT$, то $\angle TRE = \angle RED$. Отсюда получаем, что треугольник RDE равнобедренный и $DR = DE$. Следовательно, треугольники RDT и DES равны по первому признаку (углы TRD и EDS равны как соответствующие при параллельных прямых, а $RT = SD$ по условию). Теперь покажем, что $TE = TF$.

Первый способ. $\angle TFE = \angle RFD$ как вертикальные, а $\angle RFD$ (из треугольника RFD) равен $180^\circ - \angle FRD - \angle FDR$; но $\angle FRD = \angle FED$, а $\angle FDR = \angle DES$ из равенства треугольников TRD и DES. Таким образом, $\angle TFE = 180^\circ - \angle SED - \angle DEF = \angle TEF$, и поэтому $TE = TF$.

Второй способ. Так как RF биссектриса в треугольнике RTD, то $\frac{RD}{RT} = \frac{FD}{FT}$; а поскольку RE — биссектриса в треугольнике RST, то $\frac{RS}{RT} = \frac{ES}{ET}$. Преобразуем последнее выражение:

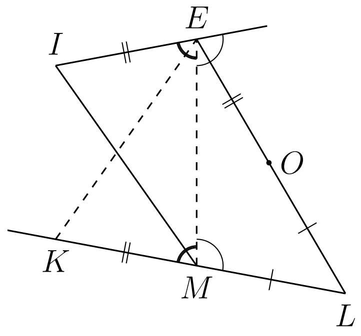
$$\frac{ES}{ET} = \frac{RS}{RT} = \frac{RD + DS}{RT} = \frac{RD}{RT} + 1 = \frac{FD}{FT} + 1 = \frac{FD + FT}{FT} = \frac{TD}{TF} = \frac{ES}{TF}.$$

Следовательно, $TE = TF$.

8. (30 баллов) *Дан четырехугольник $ELMI$. Известно, что сумма углов LME и MEI равна 180 градусам и $EL = EI + LM$. Докажите, что сумма углов LEM и EMI равна углу MIE.*

Решение. Отметим на луче LM за точкой M такую точку K, что $MK = IE$, и рассмотрим треугольники IEM и KEM. По построению, $\angle LME + \angle EMK = 180^\circ$, а по условию $\angle LME + \angle MEI = 180^\circ$, следовательно, $\angle KME = \angle MEI$; стороны MK и EI равны по построению, а сторона ME у этих трегольников общая. Поэтому треугольники равны по первому признаку.

Следовательно, $\angle MIE = \angle EKM$, а $\angle EMI = \angle MEK$, поэтому $\angle LEM + \angle EMI = \angle LEM + \angle MEK = \angle LEK$. Но треугольник LEK — равнобедренный



с основанием KE, т.к. $EL = EI + ML = MK + ML = KL$. Отсюда получаем, что $\angle LKE = \angle LEK$, т.е. $\angle MIE = \angle LEK$.

9. (40 баллов) *Вася и Миша выписывают на доске натуральные числа и вычисляют их квадраты. В какой-то момент оказалось, что для трех чисел n, k, l выполняется равенство $n^2 + k^2 = 2l^2$. Докажите, что число*

$$\frac{(2l-n-k)(2l-n+k)}{2}$$

является точным квадратом.

Решение. Преобразуем числитель:

$$(2l-n-k)(2l-n+k) = (2l-n)^2 - k^2 = 4l^2 - 4ln + n^2 - k^2.$$

По условию $k^2 = 2l^2 - n^2$, откуда получаем

$$4l^2 - 4ln + n^2 - \left(2l^2 - n^2\right) = 2l^2 - 4ln + 2n^2 = 2(l-n)^2.$$

Таким образом, исходное выражение является квадратом числа $l - n$.

10. (40 баллов) *Известно, что числа s и r положительны и $r < s$. Докажите, что*

$$\frac{s^3 - r^3}{s^3 + r^3} > \frac{s^2 - r^2}{s^2 + r^2}\,.$$

Решение. Воспользовавшись формулами суммы и разности кубов, а также разности квадратов, получим, что необходимо доказать неравенство

$$\frac{(s-r)\left(s^2+sr+r^2\right)}{(s+r)\left(s^2-sr+r^2\right)} > \frac{(s-r)(s+r)}{s^2+r^2}\,.$$

По условию $s > r > 0$, поэтому сокращение на множитель $s - r$ и домножение на множитель $s + r$ не приведут к изменению знака неравенства. Отсюда получаем

$$\frac{s^2+sr+r^2}{s^2-sr+r^2} > \frac{s^2+2sr+r^2}{s^2+r^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{2sr}{s^2-sr+r^2} > 1 + \frac{2sr}{s^2+r^2}\,.$$

Числа s и r положительны, следовательно, полученное неравенство равносильно сле-

дующему
$$\frac{1}{s^2 - sr + r^2} > \frac{1}{s^2 + r^2}\,.$$
Знаменатели обеих дробей положительны, т.к. $s^2 - sr = s(s - r) > 0$, и при этом $s^2 - sr < s^2$. Что и требовалось доказать.

11. (40 баллов) *На доске написаны пять различных положительных чисел. Оказалось, что для любых трех разных чисел a, b и c на доске число $ab + bc + ca$ рационально. Докажите, что отношение любых двух чисел на доске рационально.*

Решение. Пусть a, b, c и d некоторые четыре числа из написанных на доске. Тогда $ab + bc + ca$ и $ab + bd + da$ рациональны, следовательно, их разность $bc + ca - bd - da = (a + b)(c - d)$ тоже рациональна.

Аналогично, разность рациональных чисел $ac + cd + da$ и $bc + cd + db$, равная $ac + ad - bc - bd = (a - b)(c + d)$, тоже рациональна. Тогда рациональна и сумма $(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d) = 2(ac-bd)$. Откуда число $b(a+d+c) = ab+bd+bc = ab+bc + ca + (bd - ac)$ рационально. Если $b(a + d + c)$ и $e(a + d + c)$ оба рациональны, то их частное (все числа положительны) b/e тоже рационально. Что и требовалось доказать.