

10–11 классы

Заключительный этап

Задача 1. (5 баллов)

Функция $\sigma(n)$ - сумма делителей натурального числа n . Например, $\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28$.

- а) Найдите $\sigma(\sigma(n))$ и $\sigma(\sigma(m))$, где $n=334$, $m=501$. Запишите аналитическое решение.
- б) Составьте алгоритм или программу, позволяющую находить величину $\sigma(\sigma(n))$ по введенному с клавиатуры значению n .

Задача 2. (5 баллов)

В камере, содержащей смесь кислорода (32 грамма) и водорода (4 грамма), произошел взрыв. Давление в камере при взрыве увеличилось в два раза. На сколько градусов при этом возросла температура в камере, если до взрыва она равнялась 27°C ?

Задача 3. (5 баллов)

Мячик, масса которого 80 г, падает с высоты 2 м с нулевой начальной скоростью вертикально вниз. После удара о пол мячик отскакивает вертикально вверх, поднимается до высоты, на которой его скорость становится равной нулю, снова падает вертикально вниз и так далее. После какого по счету удара наибольшая высота, на которую поднимется мячик, окажется менее 20 см, если при каждом ударе он теряет четверть своей кинетической энергии? Через какое время после начала движения мячик поднимется на эту высоту? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 4. (5 баллов)

Согласно одному распространенному интернет-мему существует очень простой способ стать богатым: нужно купить 1 кг ртути, вынуть из каждого ядра атома ртути по одному протону и получить в результате 1 кг золота.

На основании приведенных ниже данных об изотопах золота и ртути, считая, что ртуть содержит только природные изотопы, ответьте на следующие вопросы:

1. Какая масса золота получится на самом деле, если из каждого атома ртути удалить по одному протону? Предполагается, что данная операция происходит мгновенно для всех атомов.
2. Сколько времени займет данная операция, если тратить на каждый атом по 1 нс?
3. Какая масса золота останется спустя 60 дней после проведения данной операции (при условии, что операция по удалению протона происходит

мгновенно и одновременно для всех атомов ртути)? Сколько по массе образуется ртути, платины и таллия спустя 60 дней?

Указание: расчеты масс проводить с точностью до 0,1 г.

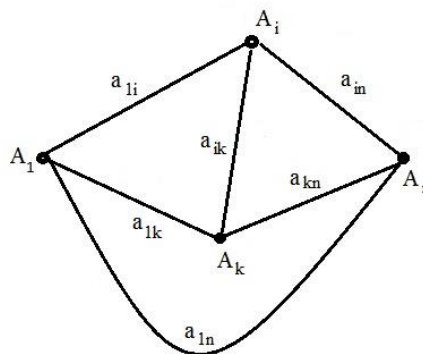
Изотоп	Содержание в природе, %	Период полураспада	Дочерний изотоп
196Hg	0,15	стабилен	
198Hg	10,04	стабилен	
199Hg	16,94	стабилен	
200Hg	23,14	стабилен	
201Hg	13,17	стабилен	
202Hg	29,74	стабилен	
203Hg	-	46.6 суток	203Tl (стабилен)
204Hg	6,82	стабилен	

Изотоп	Период полураспада	Схема распада	Дочерний изотоп
194Au	38 ч	β^+	194Pt
195Au	186.1 суток	К-захват	195Pt
196Au	6.2 суток	β^+	196Pt
197Au	стабилен	-	
198Au	2.7 суток	β^-	198Hg
199Au	3.1 суток	β^-	199Hg
200Au	48,4 мин	β^-	200Hg
201Au	26 мин	β^-	201Hg
202Au	28,8 с	β^-	202Hg
203Au	60 с	β^-	203Hg
204Au	38,3 с	β^-	204Hg

Задача 5. (5 баллов)

Диспетчер транспортной компании составляет карту маршрутов перевозок груза между городами. Каждый маршрут начинается в городе A_1 , проходит через все города A_i , $i=2, \dots, n-1$ в произвольном порядке по одному разу, заходит в город A_n ; затем маршрут ведет в начальный город A_1 и снова проходит через все города A_i , $i=2, \dots, n-1$ в произвольном порядке по одному разу. При использовании в маршруте дважды одной дороги между городами A_i и A_j (неважно, в каком порядке следования) налагается однократный штраф 10 рублей. Штрафы для маршрута суммируются.

Входные данные считываются из файла **input.txt**. Данные имеют вид таблицы из строк и столбцов, числа разделены пробелом. Число, находящееся в i -й строке и j -м столбце, задает длину дороги между городами A_i и A_j .



Максимальное число городов (строк): $n=8$.

Например:

```
0 a12 a13 a14
a12 0 a23 a24
a13 a23 0 a34
a14 a24 a34 0
```

Итогом работы программы должен быть файл (**output.txt**) в котором необходимо вывести построчно через пробел: длина маршрута, штраф, порядок городов (в виде последовательности их номеров).

Строки необходимо упорядочить по возрастанию длины маршрута. При наличии нескольких маршрутов одной длины, сортировка для них должна быть осуществлена по возрастанию штрафа.

Например:

```
562 10 15243623451
562 30 12345653421
```

...

Указание: Программа должна содержать комментарии к каждому блоку, объясняющие принцип его действия. Предпочтительные языки программирования: Си++, Pascal, Basic. Не допустимо использование встроенных в язык процедур или библиотек которые выполняют часть программного кода, например сортировку (данный блок необходимо написать самостоятельно).

$N4 = 0$ баллов
 $N5 = 0$ баллов

Задача 1

5) `#include <iostream>``using namespace std;``long long g (long long n)``{ long long s, i;``s = 0;``for (i = 1; i <= n; i++)``if (n % i == 0) s += i;``return s;``}``int main()``{ long long n, m;``cin >> n;``m = g(n);``cout << g(m);``return 0;``}`// функция g - перебор всех чисел для
поиска делителей и суммиро-
вание найденных делителей// получение числа с клавиатуры и
звукратное применение функции
для суммы делителей

a) $334 = 167 \cdot 2$

$334 = 334 \cdot 1$

$167 + 2 + 334 + 1 = 404$

$404 = 101 \cdot 4 = 202 \cdot 2 = 404 \cdot 1$

$101 + 4 + 202 + 2 + 404 + 1 = \underline{704}$

$501 = 167 \cdot 3$

$501 = 501 \cdot 1$

$501 + 1 + 167 + 3 = 672$

$672 = 336 \cdot 2$

$672 = 224 \cdot 3$

$672 = 112 \cdot 6$

$672 = 168 \cdot 4$

$672 = 84 \cdot 8$

$672 = 42 \cdot 16$

$672 = 21 \cdot 32$

$672 = 96 \cdot 7$

$672 = 56 \cdot 12$

$672 = 28 \cdot 24$

$672 = 14 \cdot 48$

$672 = 672 \cdot 1$

$336 + 2 + 224 + 3 + 112 + 6 + 168 + 4 + 84 + 8 + 42 + 16 + 21 + 32 + 96 + 7 + 56 + 12 + 28 + 24 + 14 + 48 + 672 + 1 =$
 $= \underline{2016}$

Ответ: 704; 2016

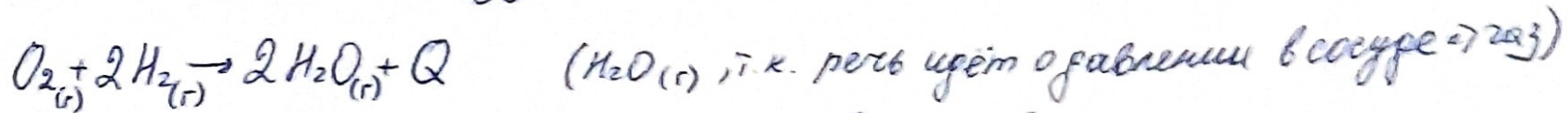
4 балла

Задача 2

$$M_{O_2} = 32 \text{ г/моль} ; M_{H_2} = 2 \text{ г/моль}$$

$$\nu_{O_2} = \frac{32}{32} = 1 \text{ моль} ; \nu_{H_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ моль}$$

Взрыв произошёл в результате реакции O_2 и H_2



исходно $\nu_{H_2} = 2 \cdot \nu_{O_2} \Rightarrow$ ~~реакт~~ оба вещества прореагировали без остатка

$$pV = \nu RT$$

$$V = \text{const}$$

$$\nu_{\text{исх}} = 3 \text{ моль}$$

$$\nu_{\text{кон}} = 2 \text{ моль}$$

$$p \uparrow 2p \Rightarrow T \uparrow \text{ в } 3 \text{ раза}$$

$$\left(\begin{array}{l} p_0 = 5T_0 \cdot \text{const} \\ 2p_0 = 2T_2 \cdot \text{const} \end{array} \right)$$

$$T_{\text{исх}} = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

$$T_{\text{кон}} = 300 \cdot 3 = 900 \text{ K}$$

$$900 \text{ K} = \text{это } 627^\circ \text{C}$$

$$\Delta T = 600^\circ \text{C}$$

Ответ: 600

5 баллов

Задача 3

st068098

Дано:

$$h_0 = 2 \text{ м}$$

$$m = 80 \text{ г} = 0,08 \text{ кг}$$

$$h_n < 0,2 \text{ м}$$

$$n = ?$$

$$t = ?$$

$$E_{k_n} = \frac{3}{4} E_{k_{n-1}}$$

$$g = 9,8$$

Решение:

Т.к. сопротивлением воздуха мы пренебрегаем, то E_n на максимальной высоте равно E_k ~~на~~ у поверхности земли

$$E_{n_0} = mgh_0 = 0,08 \cdot 9,8 \cdot 2 = 1,568 \text{ Дж}$$

После каждого удара энергия уменьшается на $1/4$ своего значения \Rightarrow остаётся $3/4$
Тогда изменение энергии будет

$$E_0 = 1,568$$

$$E_1 = \frac{3}{4} \cdot 1,568$$

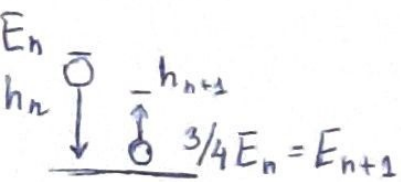
$$E_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1,568 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 1,568$$

$$E_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 1,568 \quad \text{и т.д.}$$

$$\text{Когда высота} = 20 \text{ см}, E_n = 0,08 \cdot 9,8 \cdot 0,2 = 0,1568$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 1,568 \leq 0,1568 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,1$$

Такое минимальное n (подбором) равно 9.



Запишем уравнение для полёта вверх и вниз:

$$V_{0n}t - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow t(V_{0n} - \frac{gt}{2}) = 0 \Rightarrow t = \frac{2V_{0n}}{g}$$

V_{0n} определяется из равенства $E_{k_n} = 3/4 E_{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{mV_{0n}^2}{2} = mgh_{n-1} \cdot \frac{3}{4}$$

$$E_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n mgh_0 \Rightarrow h_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n h_0 \Rightarrow \frac{mV_{0n}^2}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^n mgh_0 \Rightarrow V_{0n}^2 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n gh_0$$

1-ый полёт вниз $-\frac{gt^2}{2} = h_0$ $t = \sqrt{4/9,8} = \frac{2}{\sqrt{9,8}}$

$$V_1 = \sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \frac{3}{4}}$$

от 1-ого удара до 2-ого

$$t = \frac{2\sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \frac{3}{4}}}{9,8} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9,8}}$$

$$V_2 = \sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \frac{9}{16}}$$

от 2-ого удара до 3-его

$$t = \frac{2\sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \frac{9}{16}}}{9,8} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{\frac{9}{16}}}{\sqrt{9,8}} = \frac{3}{\sqrt{9,8}}$$

$$V_3 = \sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \frac{27}{64}}$$

от 3-его удара до 4-ого

$$t = \frac{2\sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \frac{27}{64}}}{9,8} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{\frac{27}{64}}}{\sqrt{9,8}}$$

т.е. $t_n = \frac{4}{\sqrt{9,8}} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{4}{\sqrt{9,8}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n/2}$



всего у нас один полёт вниз с 2м, 8 полных циклов (от удара до удара) и один полёт вверх до высоты $\left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot 1,568$ м

Время, которое летит до $1,568 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$ это половина 9-ого цикла, т.е. $\frac{2}{\sqrt{9,8}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{9/2}$

~~$$\sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9} + \frac{2}{\sqrt{9,8}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{9/2} = 1,568 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$$~~

Суммарное время: $\frac{2}{\sqrt{9,8}} \cdot \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}\right) + \frac{4}{\sqrt{9,8}} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2/2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{8/2}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2/2} + \dots$ — это геометрическая прогрессия с $b_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}$ и $q = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} \cdot (1 - (\frac{3}{4})^{1/2 \cdot 8})}{1 - (\frac{3}{4})^{1/2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot (1 - (\frac{3}{4})^4)}{1 - \sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$\sqrt{9,8} \approx 3,13 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{9/2} \approx 0,224 \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,3164$$

Суммарное время $\approx 6,46$ с

Ответ: 9 раз; $\sim 6,46$ с

5 баллов