

10–11 классы

Заключительный этап

Задача 1. (5 баллов)

Функция $\sigma(n)$ - сумма делителей натурального числа n . Например, $\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28$.

- а) Найдите $\sigma(\sigma(n))$ и $\sigma(\sigma(m))$, где $n=628$, $m=1413$. Запишите аналитическое решение.
- б) Составьте алгоритм или программу, позволяющую находить величину $\sigma(\sigma(n))$ по введенному с клавиатуры значению n .

Задача 2. (5 баллов)

В камере, содержащей смесь кислорода (32 грамма) и водорода (4 грамма), произошел взрыв. Давление в камере при взрыве увеличилось в два раза. На сколько градусов при этом возросла температура в камере, если до взрыва она равнялась 27°C ?

Задача 3. (5 баллов)

Мячик, масса которого равна m , падает с высоты h с нулевой начальной скоростью вертикально вниз. После удара о пол мячик отскакивает вертикально вверх, поднимается до высоты, на которой его скорость становится равной нулю, снова падает вертикально вниз и так далее. Известно, что при каждом ударе о пол мячик теряет долю своей кинетической энергии равную δ . Пусть для первого мячика $m = 70$ г, $\delta = 1/5$, $h = 2,5$ м, а для второго — $m = 90$ г, $\delta = 1/3$. С какой высоты должен начать падение второй мячик, чтобы удариться о пол в шестой раз через такое же время после начала движения, как и первый мячик? Чему равняется это время? Считать, что траектории движения мячиков не пересекаются; сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 4. (5 баллов)

Согласно одному распространенному интернет-мему существует очень простой способ стать богатым: нужно купить 1 кг ртути, вынуть из каждого ядра атома ртути по одному протону и получить в результате 1 кг золота.

На основании приведенных ниже данных об изотопах золота и ртути, считая, что ртуть содержит только природные изотопы, ответьте на следующие вопросы:

1. Какая масса золота получится на самом деле, если из каждого атома ртути удалить по одному протону? Предполагается, что данная операция происходит мгновенно для всех атомов.
2. Сколько времени займет данная операция, если тратить на каждый атом по 1 нс?
3. Какая масса золота останется спустя 60 дней после проведения данной операции (при условии, что операция по удалению протона происходит

мгновенно и одновременно для всех атомов ртути)? Сколько по массе образуется ртути, платины и таллия спустя 60 дней?

Указание: расчеты масс проводить с точностью до 0,1 г.

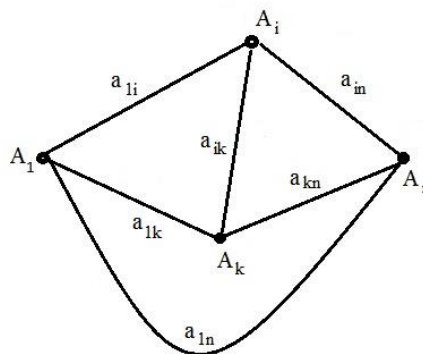
Изотоп	Содержание в природе, %	Период полураспада	Дочерний изотоп
^{196}Hg	0,15	стабилен	
^{198}Hg	10,04	стабилен	
^{199}Hg	16,94	стабилен	
^{200}Hg	23,14	стабилен	
^{201}Hg	13,17	стабилен	
^{202}Hg	29,74	стабилен	
^{203}Hg	-	46.6 суток	^{203}Tl (стабилен)
^{204}Hg	6,82	стабилен	

Изотоп	Период полураспада	Схема распада	Дочерний изотоп
^{194}Au	38 ч	β^+	^{194}Pt
^{195}Au	186.1 суток	К-захват	^{195}Pt
^{196}Au	6.2 суток	β^+	^{196}Pt
^{197}Au	стабилен	-	
^{198}Au	2.7 суток	β^-	^{198}Hg
^{199}Au	3.1 суток	β^-	^{199}Hg
^{200}Au	48,4 мин	β^-	^{200}Hg
^{201}Au	26 мин	β^-	^{201}Hg
^{202}Au	28,8 с	β^-	^{202}Hg
^{203}Au	60 с	β^-	^{203}Hg
^{204}Au	38,3 с	β^-	^{204}Hg

Задача 5. (5 баллов)

Диспетчер транспортной компании составляет карту маршрутов перевозок груза между городами. Каждый маршрут начинается в городе A_1 , проходит через все города A_i , $i=2, \dots, n-1$ в произвольном порядке по одному разу, заходит в город A_n ; затем маршрут ведет в начальный город A_1 и снова проходит через все города A_i , $i=2, \dots, n-1$ в произвольном порядке по одному разу. При использовании в маршруте дважды одной дороги между городами A_i и A_j (неважно, в каком порядке следования) налагается однократный штраф 10 рублей. Штрафы для маршрута суммируются.

Входные данные считываются из файла **input.txt**. Данные имеют вид таблицы из строк и столбцов, числа разделены пробелом. Число, находящееся в i -й строке и j -м столбце, задает длину дороги между городами A_i и A_j .



Максимальное число городов (строк): $n=8$.

Например:

```
0 a12 a13 a14
a12 0 a23 a24
a13 a23 0 a34
a14 a24 a34 0
```

Итогом работы программы должен быть файл (**output.txt**) в котором необходимо вывести построчно через пробел: длина маршрута, штраф, порядок городов (в виде последовательности их номеров).

Строки необходимо упорядочить по возрастанию длины маршрута. При наличии нескольких маршрутов одной длины, сортировка для них должна быть осуществлена по возрастанию штрафа.

Например:

```
562 10 15243623451
562 30 12345653421
```

...

Указание: Программа должна содержать комментарии к каждому блоку, объясняющие принцип его действия. Предпочтительные языки программирования: Си++, Pascal, Basic. Не допустимо использование встроенных в язык процедур или библиотек которые выполняют часть программного кода, например сортировку (данный блок необходимо написать самостоятельно).

N5 = 0 баллов

Задание 1

а) Разложим число n на множители (простые множители):

$628 = 2^2 \cdot 157$. Это число имеет $(2+1)(1+1) = 6$ делителей, по формуле определения количества делителей. Сложим их:

$$1 + 2 + 4 + 157 + 314 + 628 = 1106. \text{ Это есть } \sigma(n) = 1106.$$

Повторим операции для числа 1106:

$$1106 = 2 \cdot 7 \cdot 79. \text{ Всего 8 делителей. Сложим их:}$$

$$1 + 2 + 7 + 14 + 79 + 158 + 553 + 1106 = 1920.$$

$$\text{Таким образом } \sigma(\sigma(n)) = 1920.$$

Теперь для числа m :

$$1413 = 3^2 \cdot 157. \text{ Сложим делители числа } m.$$

$$1 + 3 + 9 + 157 + 471 + 1413 = 2054; \sigma(m) = 2054.$$

$$2054 = 2 \cdot 13 \cdot 79. \text{ Сложим делители числа } 2054:$$

$$1 + 2 + 13 + 26 + 79 + 158 + 1027 + 2054 = 3360$$

$$\text{Итак, } \sigma(\sigma(m)) = 3360.$$

$$\text{Ответ: } \sigma(\sigma(n)) = 1920; \sigma(\sigma(m)) = 3360.$$

б) Теперь составим программу, будем использовать язык программирования Python 3:

Условие

```
def sigma(n): # Сперва объявим функцию sigma σ.  
    d = [] # В этот список будем складывать делители n.  
    for i in range(1, n+1): # Переберём все числа  
        # от 1 до n включительно и проверим, является ли они де-  
        # лителем n  
        if n % i == 0:  
            d.append(i) # Если n : i, добавим i в список d  
    return sum(d) # Возвращаем сумму всех чисел из  
# списка d, то есть сумму всех делителей числа n.
```

```
N = int(input()) # Здесь сначала мы считываем число  
# с клавиатуры.
```

```
print(sigma(sigma(N))) # Теперь выведем на  
# экран результат взятия функции sigma от sigma от n.  
# Это есть два раза повторяем эту функцию (находим  $\sigma(\sigma(n))$ ).  
# На этом программа заканчивается
```

5 баллов

Числовик

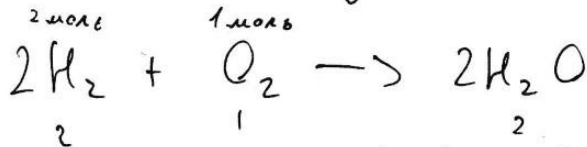
Задача 2.

Найдём количество вещества H_2 и O_2 :

$$\nu(H_2) = \frac{m(H_2)}{M(H_2)} = \frac{4}{2} = 2 \text{ моль}$$

$$\nu(O_2) = \frac{m(O_2)}{M(O_2)} = \frac{32}{32} = 1 \text{ моль}$$

Реакция происходит по схеме:



Коэффициенты при H_2 и O_2 относятся, как 2:1, также как и $\nu(H_2) : \nu(O_2) = 2:1$, а значит реакция прореагирует полностью, поскольку ниже не было сказано про избыток реагентов. Тогда, исходя из уравнения реакции:

$$\nu(H_2O) = \nu(H_2) = 2\nu(O_2) = 2 \text{ моль}$$

Тогда до взрыва количество вещества всех газов в камере ν_0 было равно:

$$\nu_0 = \nu(H_2) + \nu(O_2) = 2 + 1 = 3 \text{ моль}$$

После взрыва, поскольку после него вода оказалась в газообразном состоянии, то количество вещества газов в камере стало равно:

$$\nu = \nu(H_2O) = 2 \text{ моль.}$$

Далее, если изначальное давление принять за p_0 , а температуру за $T_0 = 27^\circ C = 300 K$, то по уравнению Менделеева-Клапейрона:

СТР. 3

Условие

$p_0 V_0 = \nu_0 R T_0$, где V - объем камеры. Отсюда

$p_0 = \frac{\nu_0 R T_0}{V}$. Итак, если после взрыва давление удвоилось и стало равно p , то:

$p = 2p_0 = \frac{2\nu_0 R T_0}{V}$; Тогда, т.к. $V = \text{const.}$, по уравнению Менделеева - Клапейрона после взрыва:

$$pV = \nu R T; T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{2\nu_0 R T_0 V}{V \nu R} = \frac{2\nu_0 T_0}{\nu} \text{ Ищем:}$$

$$T = \frac{2 \cdot 3 \cdot 300}{2} = 900 \text{ K} = 627^\circ \text{C}$$

Тогда температура возросла на величину ΔT :

$$\Delta T = T - T_0 = 627^\circ \text{C} - 27^\circ \text{C} = 600^\circ \text{C}.$$

Эту величину и искали.

Ответ: на 600°C возросла температура в камере.

5 баллов

Чистовик

Задание 4.

Исходя из данной нам таблицы средняя молярная масса такой ртуты, состоящей из природных изотопов, равна:

$M_r(\text{Hg}) = 200 \text{ г/моль}$. Тогда средняя ~~масса~~ молярная масса полученного из неё золота (поскольку мы вынимали лишь один протон) будет равна:

$M_r(\text{Au}) = 199 \text{ г/моль}$. Тогда, если мгновенно удалить протон из каждого атома ртуты, то непосредственно после операции (у золота не будет времени распасться) мы получим $m(\text{Au})$ золота. Найдём $m(\text{Au})$.

Умножив мы имеем: $\nu(\text{Hg}) = \frac{m(\text{Hg})}{M_r(\text{Hg})} = \frac{1000 \text{ г}}{200 \text{ г/моль}} = 5 \text{ моль ртуты}$.

Тогда $m(\text{Au}) = M_r(\text{Au}) \cdot \nu(\text{Au}) = M_r(\text{Au}) \cdot \nu(\text{Hg}) = 5 \cdot 199 =$
 $= 995 \text{ г} = 0,995 \text{ кг}$.

1. Ответ: Непосредственно после операции мы получили 995 грамм золота.

Далее, найдём количество атомов ртуты, с которыми мы будем проводить операцию:

$$N = \nu(\text{Hg}) \cdot N_A = 5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 30,1 \cdot 10^{23} = 3,01 \cdot 10^{24}$$

Тогда, если один атом займёт у нас 2 нс, то

Стр. 5

Чистовик

на все атомы молекул:

$$t = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 3,01 \cdot 10^{24} = 6,02 \cdot 10^{15} \text{ с}$$

Это время приблизительно равно 200 млн лет.

2. Ответ: $6,02 \cdot 10^{15}$ секунд займёт эта операция.

Исходя из таблицы содержания ртути в природе, можно сказать что у нас образуется:

0,15% ^{195}Au ; 10,04% ^{197}Au ; 16,94% ^{198}Au ; 23,14% ^{199}Au ;

13,17% ^{200}Au ; 29,74% ^{201}Au ; 6,82% ^{203}Au .

Примем 1% будет соответствовать 9,95 грамм или приблизительно 10 грамм. Тогда, по формуле массы радиоактивного вещества с периодом полураспада τ :

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}, \text{ где } t - \text{прошедшее время } (t = 55 \text{ дней})$$

Тогда мы можем считать оставшуюся массу золота, примем, если $t \gg \tau$, $m < 0,1 \text{ г}$, то будем считать массу так как значение предельно мало и приравнять к нулю. Итак:

$$m(^{195}\text{Au}) = 1,5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55}{136}} \approx 1,5 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 1,2 \text{ г}$$

$$m(^{197}\text{Au}) = 100,4 \text{ г (стабильный изотоп)}.$$

$$m(^{198}\text{Au}) = 169,4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55}{2,7}} \approx 169,4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \rightarrow 0, \text{ г } (< 0,1 \text{ г})$$

$$m(^{199}\text{Au}) = 231,4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55}{3,1}} \approx 231,4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{18} \rightarrow 0, \text{ г } (< 0,1 \text{ г})$$

(Стр. 6)

Учетовик

$$m(^{200}\text{Au}) = 131,7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55 \cdot 24 \cdot 60}{48,4}} \longrightarrow 0, \text{ r } (< 0,1 \text{ r})$$

$$m(^{201}\text{Au}) = 297,4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55 \cdot 24 \cdot 60}{26}} \longrightarrow 0, \text{ r } (< 0,1 \text{ r})$$

$$m(^{203}\text{Au}) = 68,2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55 \cdot 24 \cdot 60}{1}} \longrightarrow 0, \text{ r } (< 0,1 \text{ r})$$

У нас остается золото:

$$m(\text{Au}) = 101,6 \text{ r}$$

Учитывая, согласно таблице, золото преобразуется в ртуть, и учитывая массы образовавшихся металлов:

$$m(^{195}\text{Pt}) = 1,5 - 1,2 = 0,3 \text{ r}$$

$$m(^{198}\text{Hg}) = 169,4 \text{ r}; m(^{199}\text{Hg}) = 231,4 \text{ r}; m(^{200}\text{Hg}) = 131,7 \text{ r};$$

$$m(^{201}\text{Hg}) = 297,4 \text{ r}; m(^{203}\text{Hg}) = 68,2 \text{ r}.$$

Но, учитывая, что ^{203}Hg радиоактивен, и, поскольку период полураспада ^{203}Au крайне мал, он тоже претерпит распад, приблизительно:

$$m(^{203}\text{Hg}) = 68,2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{55}{46,6}} \approx 32 \text{ r}, \text{ и образуется } ^{203}\text{Tl}:$$

$$m(\text{Tl}) = 68,2 - 32 = 36,2 \text{ r}. \text{ Итого, масса ртути:}$$

$$m(\text{Hg}) = 169,4 + 231,4 + 131,7 + 297,4 + 32 = 861,9 \text{ r} \text{ - масса Pt:}$$

$$m(\text{Pt}) = 0,3 \text{ r}.$$

3. Ответ: Останется 101,6 г золота, и образуется 861,9 г ртути и 0,3 г платины; (и 36,2 г Tl).

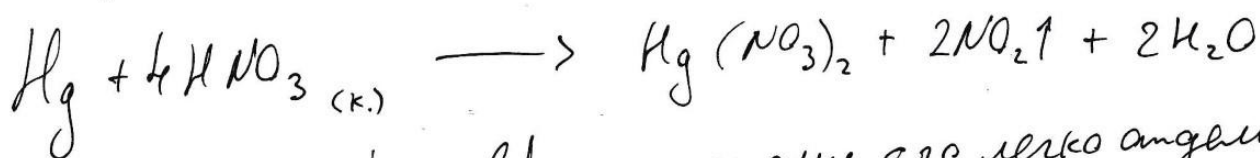
Стр. 7

Чистовик

4. Теперь рассмотрим способы разделения смеси:

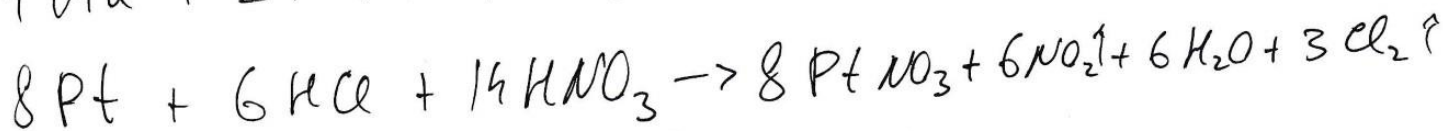
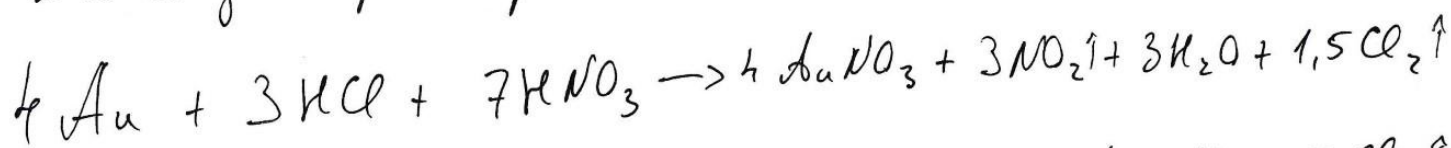
Ртуть - легкоплавкий металл. Нагревание до невысокой температуры (ниже температуры таяния Au и Pt) позволит перевести Hg в жидкое состояние и без труда отделить от смеси металлов.

Ртуть можно отделить и химически, ведь она, в отличие от благородных металлов, реагирует с азотной и серной кислотами:



Нитрат ртути растворим, поэтому его легко отделить от твердых благородных металлов, не реагирующих с азотной кислотой.

Далее нам нужно разделить получившуюся смесь золота и платины. Для этого прежде всего необходимо растворить оба металла в царской водке (смеси азотной и соляной кислот). В результате мы получим растворимые нитраты золота и платины:



Теперь мы получили раствор AuNO_3 и PtNO_3

Разделить его будем селективным образом:

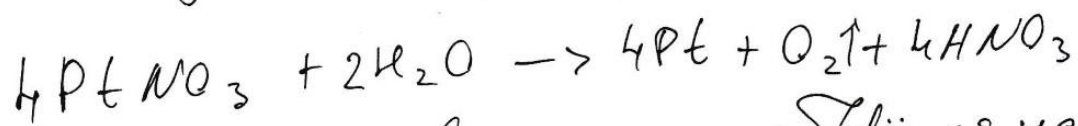
(Стр. 8)

Условие

В электрохимическом ряду напряжений металлов платина стоит правее золота, а платину при электролизе первая идет на катод. Итак, ^{проведём} ~~опыт~~ электролизом полученного раствора нитратов. Он будет протекать по следующей схеме:

Катод: $Pt^{+} + e^{-} \rightarrow Pt^{0}$, восстановление платины, поскольку ион Pt^{+} лучший окислитель, чем Au^{+} .

Анод: $2H_2O - 4e^{-} \rightarrow O_2 + 4H^{+}$, окисление кислорода, поскольку ион NO_3^{-} относится к ионной катионе и не окисляется на аноде. Итак, получаем реакцию:



Таким образом, вся платина соберётся на катоде, прежде чем начнётся восстановление золота. Мы разделили смесь Hg , Au , Pt на составные металлы в чистом виде, что от нас и требовалось.

5 баллов

Задание 3.

Четовик

Сперва рассмотрим поведение мяча до первого удара об землю. Изначально его энергия сосредоточена в потенциальной и равна $E = E_p = mgh$. Когда он в первый раз опускается об землю, его энергия сосредоточена в кинетической и равна: $E = E_k = \frac{mv^2}{2} = mgh$ (т.к. полная энергия системы остаётся (до удара) неизменной). Этот свой первый отрезок пути мяч пройдёт за время, обозначим t_1 , равное, из формулы:

$$h = \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Затем мяч потеряет δ часть энергии, и его новая энергия E_2 будет равна: $E_2 = E(1-\delta)$. Тогда, если его новая скорость сразу после удара равна v_2 , то:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2} (1-\delta); v_2 = v \sqrt{1-\delta} = v \sqrt{\beta},$$

где $\beta = 1-\delta$, введённая для удобства вычисления замена

После своего удара мяч сперва взлетит, а затем упадёт и, поскольку сопротивлением воздуха мы пренебрегаем, то скорость мяча перед следующим ударом будет равна v_2 с обратным знаком. Тогда этот подскок займёт время t_2 , находящееся из формулы:

Учебник

$$-v_2 = v_2 - g t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_2}{g} = \frac{2v\sqrt{\beta}}{g}$$

Но, из формулы $\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$, тогда:

$$t_2 = \frac{2\sqrt{\beta} \sqrt{2gh}}{g} = 2\sqrt{\frac{2\beta h}{g}} = 2t_1\sqrt{\beta}$$

Скорость после второго удара v_3 будет равна:

$v_3 = v_2\sqrt{\beta} = v\beta$. Тогда время t_3 между вторым и третьим ударами равно: $t_3 = \frac{2v_3}{g} = \frac{2v_2}{g}\sqrt{\beta} = t_2\sqrt{\beta} = 2t_1\beta$.

Последний момент времени найдем, что:

$t_4 = 2t_1\beta\sqrt{\beta}$; $t_5 = 2t_1\beta^2$; $t_6 = 2t_1\beta^2\sqrt{\beta}$. И тогда до момента удара пройдет время T :

$$T = \sum_{i=1}^6 t_i = t_1(1 + 2\sqrt{\beta} + 2\beta + 2\beta\sqrt{\beta} + 2\beta^2 + 2\beta^2\sqrt{\beta}) =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot (1 + 2\sqrt{\beta} + 2\beta + 2\beta\sqrt{\beta} + 2\beta^2 + 2\beta^2\sqrt{\beta})$$

Найдем это время, подставив данные для первого мая:

$$h = 2,5 \text{ м}; \quad \beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \cdot g \approx 10 \text{ м/с}^2$$

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5}{10}} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{5}} + 1,6 + \frac{3,2}{\sqrt{5}} + 1,28 + \frac{2,56}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (3,88 + 1,952\sqrt{5}) = 1,94\sqrt{2} + 0,976\sqrt{10} \text{ (с)}$$

Честовик

Для линейного маятника: $\delta = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$. Тогда, поскольку T для
двух маятей одинаково, найдем

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} (1 + 2\sqrt{\beta} + 2\beta + 2\beta\sqrt{\beta} + 2\beta^2 + 2\beta^2\sqrt{\beta}) = \sqrt{\frac{h}{5}} \left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8\sqrt{6}}{27}\right) = \sqrt{\frac{h}{5}} \cdot \left(\frac{87 + 38\sqrt{6}}{3}\right) = \sqrt{h} \cdot \frac{87\sqrt{5} + 38\sqrt{30}}{15} =$$

$$= 1,94\sqrt{2} + 0,976\sqrt{10}; \text{ Отсюда:}$$

$$\sqrt{h} = \frac{9,7\sqrt{2} + 4,88\sqrt{10}}{87\sqrt{5} + 38\sqrt{30}};$$

$$h = \frac{128,18 + 358,144 + 189,344\sqrt{5}}{37845 + 43320 + 33060\sqrt{6}} = \frac{546,324 + 189,344\sqrt{5}}{81165 + 33060\sqrt{6}}.$$

Ответ: Маятник необходимо бросить с высоты:

$\frac{546,324 + 189,344\sqrt{5}}{81165 + 33060\sqrt{6}}$ метров; Одна ударная маят-
ки в шесть раз по сравнению $(1,94\sqrt{2} + 0,976\sqrt{10})$ секунд.

4,5 балла