



1	2	3	4	5	6	сумма
1	4	4	0	0		12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

8–9 КЛАСС. ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подругам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a , b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2 + 2c^2} \leq \frac{9}{4(a + b + c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D , что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90^\circ$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q , для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Найти точки пересечения парабол:

$$x^2 + ax - 2$$

$$2x^2 - 3x + 2a$$

$$x^2 + ax - 2 = 2x^2 - 3x + 2a \Leftrightarrow x^2 - (a+3)x + 2a+2 = 0 \text{ — это парабола}$$

$$x = \frac{a+3 \pm \sqrt{(a+3)^2 - 8a-8}}{2} = \frac{a+3 \pm (a-1)}{2}$$

$x=2$ — точка в обеих параболах
 $x=a+1$ — точка в обеих параболах

$$x^2 + 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

$$(a+1)^2 + a(a+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 3a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Ответ: $-1, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$



2

№ 5

DM — медиана равнобедренного треугольника, значит

$$DM = AM = BM$$

$$\triangle B C_1 D \sim \triangle C B_1 D$$

$$\triangle B A B_1 \sim \triangle C A C_1$$

по 2 углам, значит

$$\frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BD}{CD} = \frac{C_1D}{B_1D}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{CC_1}$$

$$\angle A B B_1 = \angle A C C_1 \Rightarrow \angle B C B_1 C_1$$

— вписанный, значит

$$BD \cdot B_1D = CD \cdot C_1D$$

MN — сред. линия $\triangle ABC$,
 значит $2MN = AC$

$$\triangle BMN \sim \triangle BAC$$

$$\angle BAD = 90^\circ - \alpha, \angle BDM = \alpha \Rightarrow \angle BMN = \angle BAC = 90^\circ - \alpha + \beta$$

$$\angle ADM = \angle AMD = 2\alpha, \angle DMB = 180 - 2\alpha \quad \angle NMD = \angle DMB - \angle BMN = 180 - 2\alpha - (90 - \alpha + \beta) = 90 - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned}
 \angle AB_1D &= 90^\circ - \alpha \quad \angle B_1AD = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle CB_1B = 90^\circ + \beta \Rightarrow \angle CDB_1 = \\
 &= 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \alpha - \beta = \angle BDC_1 \Rightarrow \angle BC_1D = 90^\circ + \beta \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \angle MC_1D = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle C_1DM = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (180^\circ - 2\alpha) = \\
 &= 2\alpha + \beta - 90^\circ \quad \text{EX}
 \end{aligned}$$

1

№1

числовик

Пусть дается набор чисел a_1, \dots, a_7 конфет. Это не уникальная совокупность, $a_7 > \dots > a_1$.

Мама даст себе наибольшее количество конфет, если даст a_1 . Тогда:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > a_5 + a_6 + a_7$$

$$a_1 > \underbrace{a_7 - a_4}_{\geq 3} + \underbrace{a_6 - a_3}_{\geq 3} + \underbrace{a_5 - a_2}_{\geq 3} \geq 9 \Rightarrow a_1 \geq 10$$

≥ 3 ≥ 3 ≥ 3 - п.к. $a_i \in \mathbb{N}$

Мама всегда оставит себе 10 конфет:
 $a_1 = 10$, $a_i = a_{i-1} + 1$, $2 \leq i \leq 7$

Все Задание выполняется.

Ответ: 10.

№4

Допустим, на знаменателе, раскрыл скобки. Получится ^{раскрытое} неравенство.

$$6O(6,0,0) + 34O(4,2,0) \geq 16O(5,1,0) + 12O(3,3,0) + 16O(4,1,1) + 6O(3,2,1)$$

орбита ?

$$(6,0,0) \succ (5,1,0)$$

$$(4,2,0) \succ (3,3,0)$$

$$(4,2,0) \succ (4,1,1)$$

$$(4,2,0) \succ (3,2,1)$$

Неравенство верно по неравенству Мюрхеда.

Доказательство и формулировка ?

Необезная тактика для Пети:

Первым ходом Петя берёт 1 камень и их остаётся 2018. Потом вне зависимости от хода Васи он добывает до 2015 камней (ход возможен, т.к. предыдущим он взял 1 камень). Далее он будет делать так, что все числа, камней, делаясь на 5 (а значит, и 0) будут оставаться после его ходов:

Пусть после Петинго хода останется $x : 5$ камней. Вне зависимости от действий Васи, следующим ходом он берёт 1 камень (этот ход всегда возможен). Если Валя перед этим взял 2 камня, то теперь он точно возьмёт 1 и останется $x - 4$ камней, из которых тут же возьмёт Петя. Если же перед этим Валя взял 1 камень, то после второго Петинго хода останется $x - 3$ камней, и, вне зависимости от действий Васи Петя доберёт до $x - 5$. Последний ход Пети всегда возможен, т.к. перед этим он брал 1 камень.

Таким образом, 0 камней остаётся после Петинго хода, т.е. он победит.

Ответ: Петя. ✓