Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2023-2024 гг.

Участникам заключительного этапа Олимпиады по физике предлагался один из заранее заготовленных вариантов, состоявший из 5 задач. Каждая задача составлялась в нескольких вариациях. При проверке работ проверялась корректность ход решения задачи и итогового ответа. Часть задач предлагались к решению участникам разных классов. Ниже в обозначениях задач указывается, участникам из каких классов они предназначались

Структура разбиения тем задач по вариантам для разных классов:

8.1 – равномерное движение, путь, перемещение, работа с графиком

8.2 – теплоемкости, теплота сгорания топлива, изменение температуры кипения с высотой

8-9.1 – статические блоки

8-9.2– сила Архимеда, закон Гука

8-9.3 – давление жидкости, сообщающиеся сосуды, гидростатика.

9-10.1 – Искусственные спутники

9-10.2 – Равноускоренное движение

10-11.1 – Электрические цепи с нелинейными элементами

10-11.2 – Статика

10-11.3 – Гидродинамика

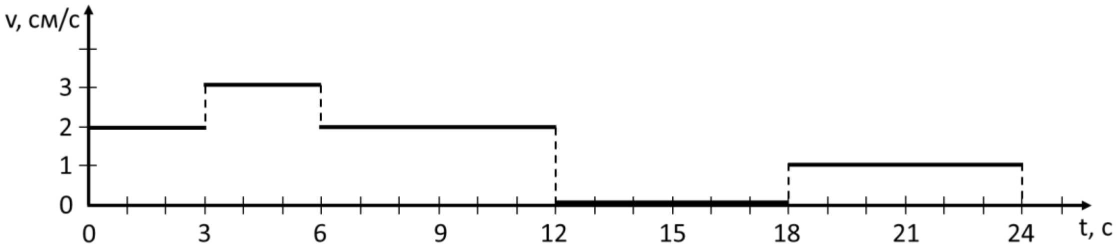
11.1 – Диффузия

11.2 – Магнитная индукция

Задача 8.1

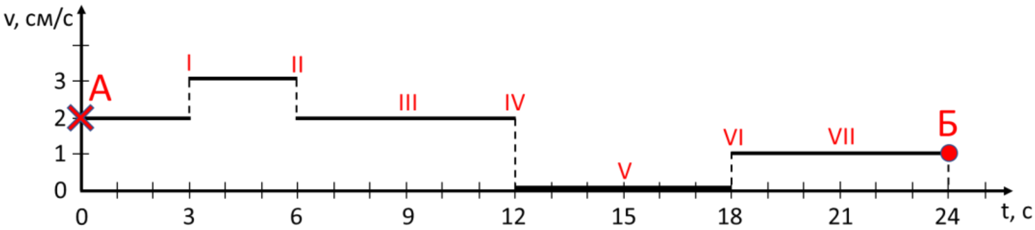
Вариант 1

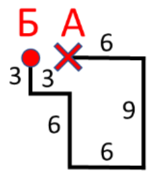
Жук приземлился на ровную горизонтальную поверхность и стал по ней ползать, каждые 3 секунды совершая поворот на 90 градусов по часовой стрелке. Зависимость модуля скорости жука от времени с момента приземления представлена на графике. Считая, что жук поворачивается мгновенно, определите его перемещение спустя 24 секунды после приземления.



Решение:

Обозначим буквами А и Б точки начала и конца движения. Для удобства пронумеруем римскими цифрами каждую точку поворота, чтобы не упустить точки поворота, когда жук поворачивал не меняя скорость (III и VII) и когда он повернул стоя на месте (V).

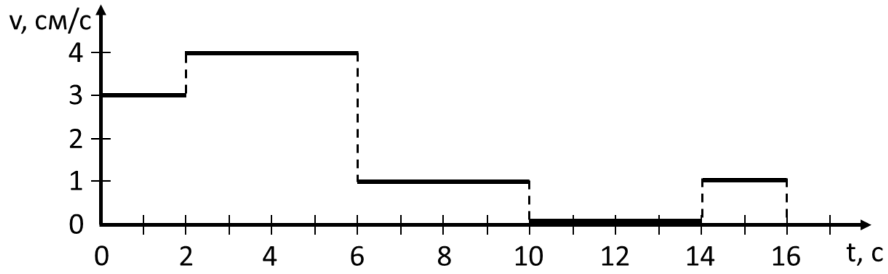




Построим траекторию движения жука как если мы наблюдали за ним сверху и обозначим длины каждого участка пути. В качестве начального направление выберем движение вправо в плоскости рисунка. Из построения видно что между точками А и Б перемещение составило **3см**.

Вариант 2

Жук приземлился на ровную горизонтальную поверхность и стал по ней ползать, каждые 2 секунды совершая поворот на 90 градусов по часовой стрелке. Зависимость модуля скорости жука от времени с момента приземления представлена на графике. Считая, что жук поворачивается мгновенно, определите его перемещение спустя 16 секунд после приземления.

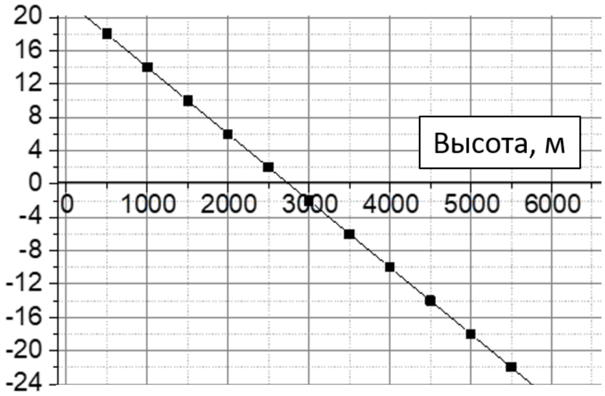


Задача 8.2

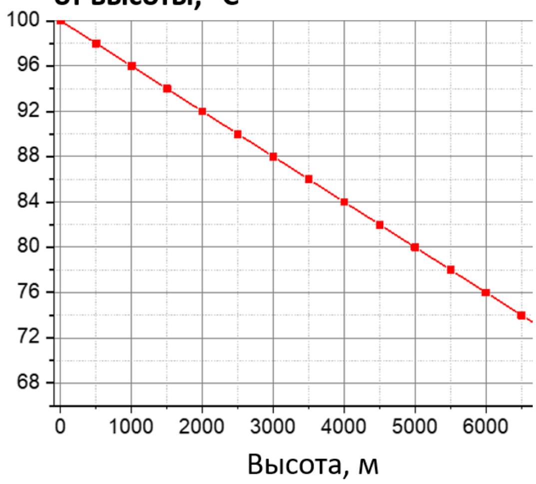
Вариант 1

Группа туристов поднимаются на гору по туристическому маршруту, вдоль которого в нижней части маршрута каждые 500 м подъема расположены пункты отдыха с цистернами с водой, а выше – с наколотым льдом. Туристы останавливаются на привал у каждого из таких пунктов, разводят костер, используя взятый с собой древесный уголь, и кипятят в открытом котелке 1.5 л воды. Используя приведенные ниже графики зависимости температуры воздуха и температуры кипения воды от высоты, рассчитайте массу оставшегося у туристов топлива после привала на высоте 5000 м. Всего с собой в поход они взяли 25 кг древесного угля, первый привал был на высоте 500 м, температура воды и льда в цистернах в пунктах отдыха равны температуре воздуха на данной высоте, КПД нагревания воды на костре равен 1%. Ответ приведите в килограммах, округлив до десятых. Удельная теплота сгорания древесного угля 34 МДж/кг, теплоёмкость воды 4200Дж/(кг·°C), теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, плотность воды 1000 кг/м^3

Зависимость температуры воздуха от высоты, ^oC



Зависимость температуры кипения от высоты, ^oC



Решение:

1) До высоты 2500м включительно уравнение теплового баланса, : $cM\Delta T = 0{,}01qm_{угл}$, где c – теплоемкость воды, M – масса воды, q – удельная теплота сгорания топлива,

$m_{угл}$ – масса топлива, ΔT – разность температур нагрева воды до температуры кипения

2) Масса сожженного угля: $m_{угл} = \frac{cM\Delta T}{0,01q}$
3) Масса сожженного угля за 5 привалов (500м, 1000м, 1500м, 2000м, 2500м) можно посчитать через сумму разности температур на каждой высоте:
$m_{угл} = \frac{cM}{0,01q}(\sum \Delta T) = \frac{4200*1,5*420}{0,01*34*10^6} = 7,782$ кг
4) Начиная с высоты 3000м в уравнение теплового баланса добавляется нагрев и плавление льда: $c_л M\Delta T' + \lambda M + cM\Delta T = 0,01qm_{угл}$, $\Delta T'$ - разность температур нагрева льда до 0 градусов.
5) Масса сожженного угля за 5 последующих привалов (3000м, 3500м, 4000м, 4500м, 5000м)

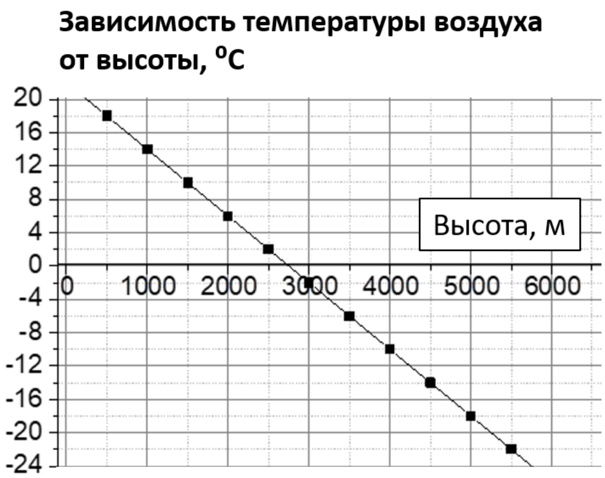
$$m_{угл} = \frac{M}{0,01q}((c_л * \left(\sum \Delta T'\right) + c * \left(\sum \Delta T\right) + 5\lambda) =$$
$$= \frac{1,5}{0,01 * 34 * 10^6}(2100 * (50) + 4200 * (420) + 5 * 330000)$$
$$= \frac{1,5}{0,01 * 34 * 10^6}(105000 + 1764000 + 1650000)$$
$$= \frac{1,5}{0,01 * 34 * 10^6}(3,519 * 10^6) = 15,525 \text{ кг}$$

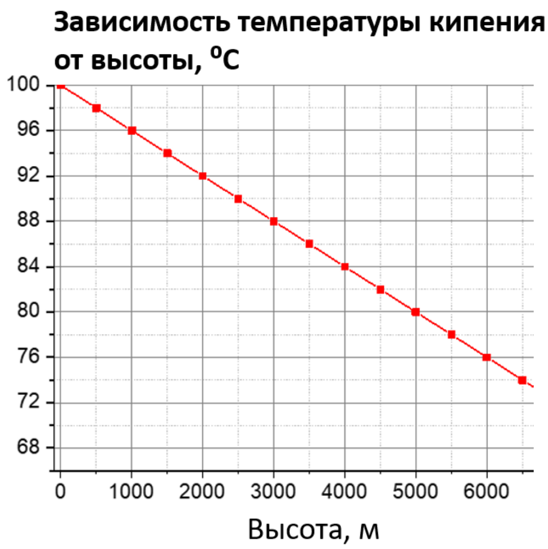
6) $25 - (7,782 + 15,525) = 1,693$ кг

Вариант 2

Группа туристов планирует подъем на гору на высоту 4500 м, на которой расположена альпинистская база. До базы проложен туристический маршрут, вдоль которого в нижней части каждые 500 м подъема расположены пункты отдыха с цистернами с водой, а выше – с наколотым льдом. Туристы хотят останавливаться на привал у каждого из таких пунктов, разводить костер, используя взятый с собой древесный уголь, и кипятить в открытом котелке 1.5 л воды. Используя приведенные ниже графики зависимости температуры воздуха и температуры кипения воды от высоты, рассчитайте массу топлива, которая потребуется туристам для достижения альпинистской базы согласно плану. Температура воды и льда в цистернах в пунктах отдыха равны температуре воздуха на данной высоте, КПД нагревания воды на костре равен 1%, первый привал планируется на высоте 500 м. Ответ приведите в килограммах, округлив до десятых.

Удельная теплота сгорания древесного угля 34 МДж/кг, теплоёмкость воды 4200Дж/(кг·°C), теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, плотность воды 1000 кг/м^3



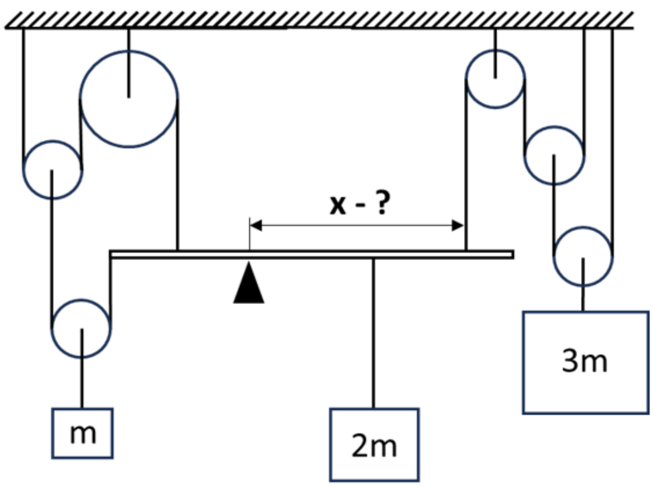


Задача 8-9.1

Вариант 1

Невесомая балка находится в равновесии и делится точкой опоры в отношении 2:3. К левой короткой части балки через систему блоков с подвешенным грузом массой m прикреплены две нити, одна к самому краю, другая к середине этой части балки. К правой части на некотором расстоянии **x** от точки опоры через систему блоков прикреплена другая нить. К середине длинной части подвешен груз массой 2m. В правой системе блоков подвешен груз массой 3m.

Какую часть от всей длины балки составляет расстояние x от точки опоры до нити в правой части системы. Все блоки, нити и пружину считать невесомыми, трение в системе отсутствует.



Расставим силы натяжения нитей, которые закреплены к балке:

$T_1 = 0,5mg$; $T_2 = 0,25mg$; $T_3 = 2mg$; $T_4 = 0,75mg$

Примем длину всей балки за L. Запишем условие равновесия (правило моментов):

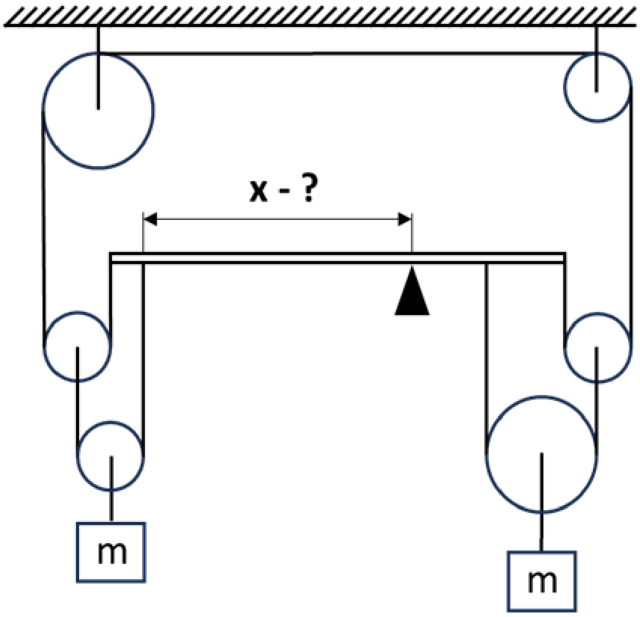
$T_1 \cdot 0,4L + T_4 \cdot x = T_2 \cdot 0,2L + T_3 \cdot 0,3L \Rightarrow 0,2mgL + 0,75mgx = 0,05mgL + 0,6mgL$

Поделим обе части уравнения на mg и помножим на 100

20L+75x=5L+60L => 75x=45L => **<u>x=0,6L (то есть к правому концу балки)</u>**

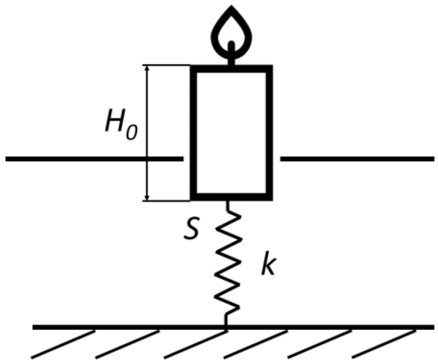
Вариант 2

Невесомая балка находится в равновесии и делится точкой опоры в отношении 3:2. К левой длинной части балки через систему блоков с подвешенным грузом массой m прикреплены две нити, одна к самому краю, другая на расстоянии **x** от точки опоры. К правой части через систему блоков тоже прикреплены две нити: одна к середине этой части балки, другая к правому краю. К одному из блоков в правой части за пружину подвешен груз массой m. Определите, какую часть от всей длины балки составляет расстояние x от точки опоры до нити в левой части системы. Все блоки, нити и пружину считать невесомыми, трение в системе отсутствует.



Задача 8-9.2

Парафиновая цилиндрическая свечка высотой $\boldsymbol{H_0}$ и площадью основания $\boldsymbol{S}$ плавает в бассейне. Свечка прикреплена к полу бассейна пружинкой с жесткостью $\boldsymbol{k}$ (см. рисунок), пружина растянута. Свечку поджигают. Пока горит фитиль, парафин медленно испаряется, форма свечки при этом остается цилиндрической, ее высота уменьшается со скоростью $\boldsymbol{c}$. Определите, как и с какой скоростью будет изменяться растяжение пружинки.



Решение

Обозначим зависимость высоты свечки от времени как *H(t)*. По условию оно дается выражением:

$$H(t) = H_0 - ct$$

Обозначим за *h(t)* зависимость от времени высоты погруженной части свечки. По условию сказано, что свечка горит медленно и с постоянной скоростью, поэтому второй закон Ньютона может быть записан как:

$$mg + k\Delta x = \rho_в g h(t) S => \rho_п H(t) + \frac{k\Delta x}{Sg} = \rho_в h(t)$$

$$\rho_п (H_0 - ct) + \frac{k\Delta x(t)}{Sg} = \rho_в h(t)$$

Поскольку глубина бассейна остается неизменной, можно записать:

$$x_0 + \Delta x(t) + h(t) = G => \Delta x(t) = G - h(t) - x_0$$

Подставим в исходное выражение:

$$\rho_п (H_0 - ct) + \frac{k}{Sg}(G - h(t) - x_0) = \rho_в h(t)$$

И тогда зависимость $h(t)$:

$$\rho_п (H_0 - ct) + \frac{k}{Sg} G - \frac{k}{Sg} x_0 = \left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right) h(t)$$

Рассмотрим два произвольных момента времени t1 и t2, причем t2>t1:

$$\rho_п (H_0 - ct_2) + \frac{k}{Sg} G - \frac{k}{Sg} x_0 = \left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right) h(t_2)$$

$$\rho_п (H_0 - ct_1) + \frac{k}{Sg} G - \frac{k}{Sg} x_0 = \left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right) h(t_1)$$

Вычтем из первого второе:

$$\rho_п (H_0 - ct_2) - \rho_п (H_0 - ct_1) = \left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right) h(t_2) - \left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right) h(t_1)$$

$$-c\rho_п(t_2 - t_1) = \left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right)(h(t_2) - h(t_1))$$

$$-\frac{c\rho_п}{\left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right)} = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Высота погруженной части будет уменьшаться со скоростью:

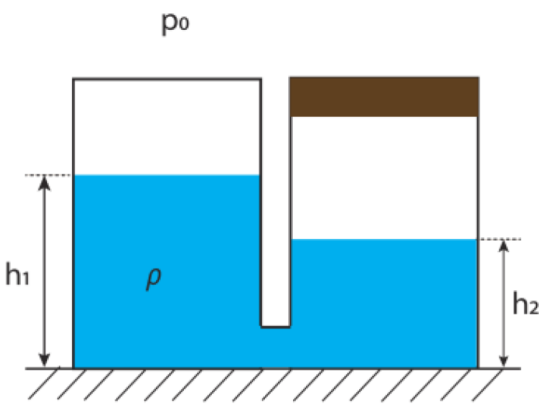
$$v = -\frac{c\rho_п}{\left(\rho_в + \frac{k}{Sg}\right)}$$

Значит пружинка будет удлиняться с той же скоростью.

Задача 8-9.3

Вариант 1

В закрытой комнате, где атмосферное давление составляет p_0 = 100 кПа находятся два пустых одинаковых сосуда высотой H = 70 см и площадью основания S = 150 см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна, и один из сосудов закрыт тонкой пробкой. Необходимо определить объем жидкости с плотностью ρ = 930 кг/м^3, который нужно влить в открытый сосуд (при этом жидкость не переливается через край), чтобы пробка вылетела. Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна F = 45 Н. Поскольку температура в помещении постоянна, то для воздуха в замкнутом объеме произведение давления и объема остается неизменным: pV = const. Объём цилиндра можно рассчитать по формуле: V = Sh, где S – площадь основания, h – высота цилиндра. Массой пробки, её размером и размером соединительной трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2.



Решение:

Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в комнате. По мере наливания жидкости объем воздуха в сосуде уменьшается, а его давление увеличивается, что подтверждается условием pV = const.

Чтобы выдавить пробку давление изолированного воздуха p должно стать достаточно большим, то есть: $p = F/S+p_0$, где F/S давление необходимое для того, чтобы преодолеть силу трения пробки, а p_0 давление атмосферы с внешней части пробки.
Запишем для этой ситуации баланс давлений в левой и правой части системы:

$$p_0+\rho g h_1=p+\rho g h_2 \Rightarrow p_0+\rho g h_1=F/S+p_0+\rho g h_2 \Rightarrow \rho g h_1=F/S+\rho g h_2.$$

Где h_1 – высота столба жидкости в открытом сосуде, h_2 – высота столба жидкости в сосуде, закрытом пробкой.

В то же время, для воздуха в сосуде справедливо равенство (применим условие pV = const для состояния до наливания жидкости и после наливания в момент, когда пробка начнёт движение, объём найдём через формулу для объёма цилиндра $V_1=HS$, т.к толщиной пробки можно пренебречь):

$$p_0V_1=pV_2 \Rightarrow p_0HS=p(H-h_2)S \Rightarrow p_0H=(F/S+p_0)(H-h_2)\Rightarrow 0=FH/S-Fh_2/S-p_0h_2 \Rightarrow h_2=FH/(F+p_0S).$$

Подставим h_2 в первое уравнение:

$$\rho g h_1=F/S+\rho g FH/(F+p_0S).$$

И найдем h_1:

$$h_1=F/(S\rho g)+FH/(F+p_0S).$$

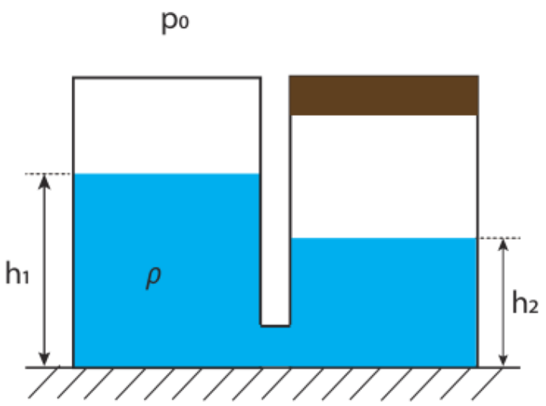
Тогда искомый объем:

$$V = S(h_1+h_2)=S(F/(S\rho g)+2FH/(F+p_0S))=F(1/(\rho g)+2SH/(F+p_0S)).$$

Подставляя числа, получаем ответ V = 5450 см3 (при g=10 м/с2). Если объем налитой жидкости хоть немного превысит это значение, то пробка вылетит.

Вариант 2

В закрытой комнате, где атмосферное давление составляет p_0 = 100 кПа находятся два одинаковых сосуда высотой H = 100 см и площадью основания S = 100 см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна. Оба сосуда заполнили на четверть водой плотностью ρ = 1000 кг/м^3, после чего один из сосудов плотно закрыли тонкой пробкой. Необходимо определить объём воды, который нужно влить в открытый сосуд (при этом жидкость не переливается через край), чтобы пробка вылетела. Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна F = 20 Н. Поскольку температура в помещении постоянна, то для воздуха в замкнутом объеме произведение давления и объема остается неизменным: pV = const. Объём цилиндра можно рассчитать по формуле: V = Sh, где S – площадь основания, h – высота цилиндра. Массой пробки, её размером и размером соединительной трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2.



Задача 9-10.1

Вариант 1

Космический зонд массой m движется вокруг планеты X по перпендикулярной экваториальной плоскости круговой орбите радиуса R со скоростью v. Период обращения планеты вокруг своей оси равен T, причем $T \gg 2\pi R/v$. Когда зонд пролетал над северным полюсом, его орбита проходила точно над кратером, расположенном на экваторе, при этом зонд приближался к кратеру. В этот момент зонд совершил корректирующий маневр, выбросив струю газа со скоростью u относительно зонда в направлении, перпендикулярном плоскости первоначальной орбиты, и в итоге пролетел точно на кратером. Найдите массу топлива, которую выбросил зонд в ходе маневра. Выброс считайте мгновенным, а массу топлива малой по сравнению с массой зонда.

Примечание: для малых углов α можно считать $\sin(\alpha) \simeq \alpha$, $\cos(\alpha) \simeq 1$.

Решение:

Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление выброса газа, учитывая, что первоначальная скорость зонда была перпендикулярна этому направлению:

$$0 = \mu u - (m - \mu)v_T => \mu u = (m - \mu)v_T =>$$

$$\mu = \frac{m v_T}{u + v_T}$$

В результате маневра скорость зонда почти не изменилась, ее направление сдвинулось на некоторый угол α. Тогда:

$$v_T = v \sin\alpha$$

Обозначим время, за которое зонд долетел от полюса до экватора, как t. За это время он преодолел четверть длины окружности. Тогда:

$$v = \omega R => T = \frac{2\pi}{\omega} => v = \frac{2\pi R}{T} = t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi R}{4v} = \frac{L}{4v}$$

За это же время кратер сместился на угол α:

$$t = T\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\frac{L}{4v} = T\frac{\alpha}{2\pi} => \alpha = \frac{\pi L}{2vT}$$

И тогда:

$$\mu = \frac{mv_T}{u + v_T} = \frac{mv\sin\alpha}{u + v\sin\alpha} = \frac{mv\sin\frac{\pi L}{2vT}}{u + v\sin\frac{\pi L}{2vT}}$$

Вариант 2

Космический зонд массой m движется по круговой орбите со скоростью v вокруг планеты X, период обращения которой вокруг собственной оси равен T. Длина орбиты равна L. В момент, когда зонд пролетал над северным полюсом планеты, его скорость была направлена по касательной к окружности, проходящей при первом пересечении экватора над кратером Y. В этот момент зонд совершает корректирующий маневр, выбрасывая струю газа со скоростью u относительно зонда. В результате маневра модуль скорости зонда и высота орбиты не изменились. Считая выброс мгновенным, определите массу выброшенного топлива, если известно, что, достигнув экватора, зонд пролетел точно над кратером.

Решение:

Если бы спутник продолжал двигаться в том же направлении, то к моменту, когда он достигнет экватора, кратер сместиться на некоторое расстояние по экватору. Поэтому потребовался корректирующий маневр.

Обозначим за t время, за которое спутник преодолел расстояние до точки на экваторе, где расположен кратер. По условию нам дано, что модуль скорости спутника после маневра не изменился. Следовательно, спутник будет двигаться по окружности того же радиуса, смещенной на некоторый угол α. Двигаясь от северного полюса до экватора, он пройдет расстояние, равное четверти длины окружности. Следовательно:

$$t = \frac{L}{4v}$$

За это же время кратер сместиться на расстояние вдоль дуги окружности $R\alpha$, где R – радиус планеты, а угол α определяется из периода обращения планеты T:

$$t = \frac{\alpha}{2\pi}T \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi L}{2vT}$$

По условию дано, что после выброса топлива модуль скорости зонда не изменился. Векторы скорости до и после образуют равнобедренный треугольник с углом α между равными сторонами. Тогда модуль вектора разности скоростей (приращения скорости в результате маневра) будет равен:

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = v\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = v\sqrt{2(1-\cos\frac{\pi L}{2vT})}$$

Для соблюдения условия неизменности модуля скорости зонда после маневра направление выброса струи топлива должно быть противоположно направлению вектора $\overrightarrow{\Delta v}$. Поскольку выброс топлива считаем мгновенным, можем записать закон сохранения импульса до и после маневра следующим образом:

$$(m-\mu)\overrightarrow{\Delta v} = \mu\,\vec{u}$$

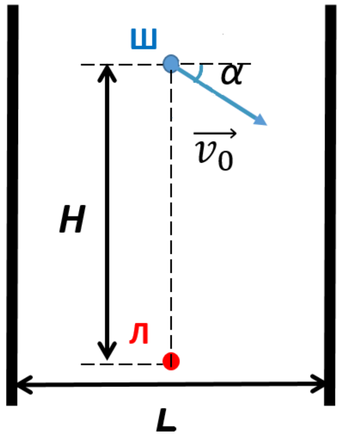
$$(m-\mu)\left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right| = \mu u \Rightarrow m\left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right| = \mu\left(u + \left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right|\right)$$

И масса топлива тогда может быть найдена, используя ранее полученное выражение для $|\overrightarrow{\Delta v}|$:

$$\mu = m|\overrightarrow{\Delta v}|/(u + |\overrightarrow{\Delta v}|)$$

Задача 9-10.2

На горизонтальной поверхности закреплены два гладких параллельных бортика, расстояние между ними равно L. Посередине между ними на расстоянии H друг от друга расположены шайба (Ш) и лунка (Л). По шайбе ударяют, сообщая ей скорость v_0 в направлении к одному из бортов под углом α. Определите минимальное значение угла α, при котором шайба попадет в лунку. Размерами шайбы и лунки можно пренебречь. Шайба отскакивает от бортиков абсолютно упруго. Коэффициент трения шайбы о горизонтальную поверхность равен μ.



Решение:

По условию дано, что шайба попала в лунку. Поскольку угол, под которым направляют шайбу к бортику, не определен, заранее неизвестно, сколько раз он отскакивает от бортиков перед тем, как попасть в лунку.

Можно воспользоваться тем обстоятельством, что шайба отскакивает от бортиков упруго, т.е. модуль скорости сохраняется, меняется только ее направление. Между столкновениями движение описывается законами Ньютона. Сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu m g$$

Найдем ускорение из

$$ma = -\mu m g$$

Масса шайбы уходит из уравнения

Движение получается равнозамедленным из-за наличия трения между шайбой и поверхностью

$$v_0 - at = v$$

Расстояние l, которое проходит шайба, равно:

$$v_0 t - at^2/2 = l$$

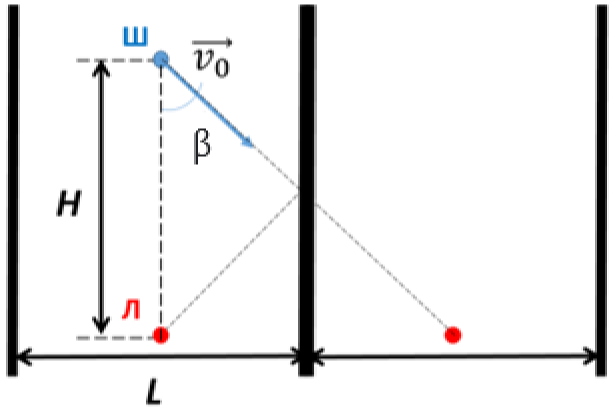
Для нахождения максимального расстояния, которое проходит шайба, воспользуемся экстремальным значением скорости:

$$v_0 - at = 0$$

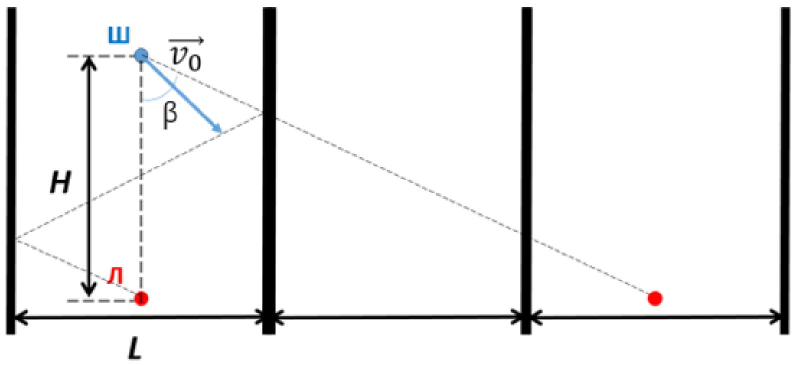
Тогда

$$\mathrm{l_{max}} = \mathrm{v_0^2/2a}$$

За счет того, что при упругом столкновении угол падения равен углу отражения, мы можем описать движение после столкновения как движение по прямой в зеркально отраженном относительно бортика пространстве. Пусть $\beta = 90^\circ - \alpha$



Таким образом, копируя и зеркально отражая пространство между бортиками после каждого столкновения, мы можем рассматривать движение шайбы с n столкновениями от бортиков просто как движение по прямой от исходной точки до точки Л’ которая находится в n-й зеркальной копии пространства между бортиками.



Ищем наибольшее число столкновений n, при котором l остается меньше $lmax$

$$\sin\alpha = \frac{H}{l}$$

$$\cos\alpha = \frac{nL}{l}$$

Из тригонометрического тождества равенства единице сумме квадратов синуса и косинуса угла, число столкновений n равно

$$\mathrm{n} = \sqrt{(l^2 - H^2)/L^2}$$

Тогда наибольшее число столкновений – округленное вниз значение

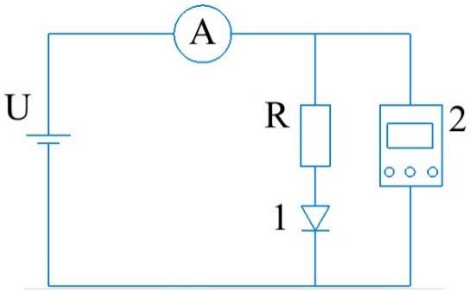
$$n_{max} = \sqrt{\left({l_{max}}^2 - H^2\right)/L^2}$$

И угол можно найти из соотношения

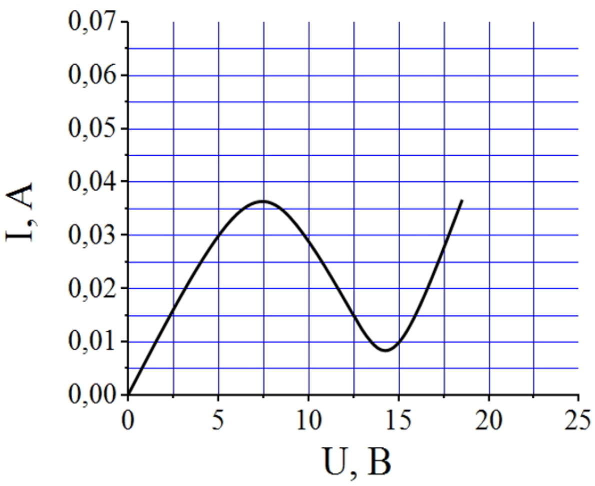
$$\alpha_{min} = \text{arctg}\left(\frac{H}{n_{max}L}\right) = \text{arctg}\left(\frac{H}{\sqrt{(v_0^2/2\mu g)^2 - H^2}}\right)$$

Задача 10-11.1

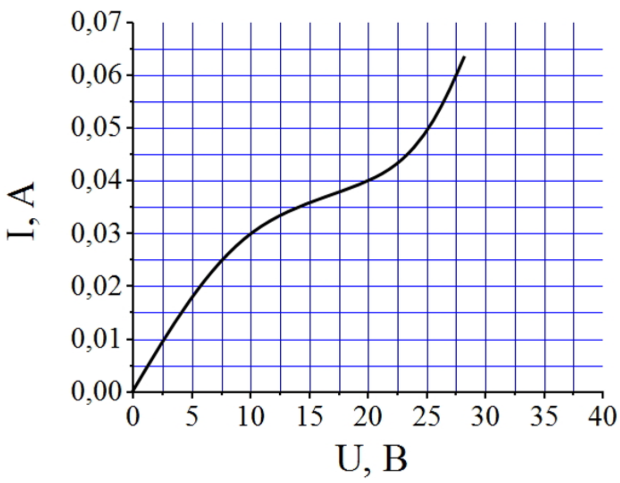
Резистор R, туннельный диод 1 и прибор 2 включены в электрическую схему, как показано на рисунке. Напряжение источника U, питающего цепь, составляет 20 В. Максимально допустимая мощность источника составляет 1 Вт. Сопротивление резистора R составляет 500 Ом. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) диода и прибора изображены на графиках ниже. Определите показания амперметра, если схема работает в допустимом режиме. Внутренним сопротивлением источника пренебрегите.



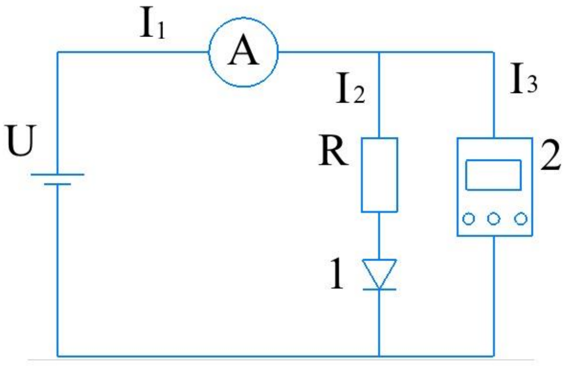
ВАХ туннельного диода (1)



ВАХ прибора (2)



Решение:



Обозначим токи, как показано на рисунке 4 и составим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ U_0 = U_R + U_1 \\ U = U_2 \end{cases},$$

где U_1- напряжение на туннельном диоде U_2-наприжение на приборе.

Перепишем систему уравнения в следующем виде:

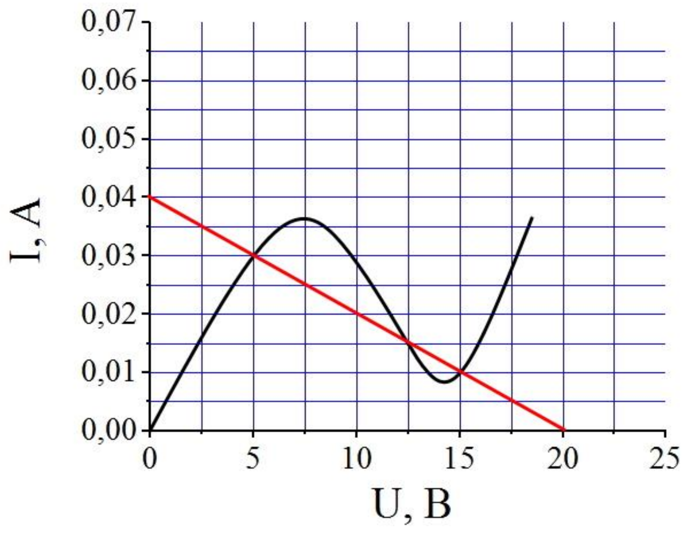
$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ U_0 = I_2 \cdot R + U_1 \\ U = U_2 \end{cases}$$

Из ВАХ прибора найдем ток, протекающий через него: $I_3 = 0.04$ А.

Из системы уравнений получим уравнения для тока через резистор и диод:

$I_2 = \frac{U - U_1}{R}$.

Графическим методом найдем ток через диод и резистор.



Ток I_2 может принимать значения 0.03 А, 0.015 А, 0.01 А.

Следовательно общий ток цепи I_1 может также принимать три различных значения 0.05 А, 0.055 А, 0.07 А, но он не может превысить 0.05 А из-за ограничения в мощности.

Задача 10-11.2

Вариант 1:

Мотоциклист пытается сдвинуть тяжелый груз массой M с места с помощью своего заднеприводного мотоцикла. Он привязал груз веревками к оси заднего колеса, запустил двигатель и стал постепенно увеличивать обороты заднего колеса. В некоторый момент переднее колесо оторвалось от земли, двигатель пришлось заглушить, но груз так и не сдвинулся с места. Определите, груз какой массы нужно закрепить мотоциклисту на оси переднего колеса, чтобы получилось сдвинуть груз с места. Радиус колес равен R, расстояние между осями колес равно L, масса мотоцикла с мотоциклистом равна m, а их центр тяжести расположен посередине между осями колес. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность равен μ и монотонно возрастает с частотой обращения заднего колеса.

Вариант 2:

Мотоциклист пытается сдвинуть камень массой M с места с помощью своего заднеприводного мотоцикла. Он привязал груз веревками к оси заднего колеса, запустил двигатель и стал постепенно увеличивать обороты заднего колеса. В некоторый момент переднее колесо оторвалось от земли, двигатель пришлось заглушить, но камень так и не сдвинулся с места. Мотоциклист решает закрепить на корпусе мотоцикла дополнительный груз массой Δm, расположив его на отрезке между осями колес. Определите, на каком расстоянии от оси заднего колеса ему нужно расположить этот груз, чтобы получилось сдвинуть камень с места. Радиус колес равен R, расстояние между осями колес равно L, масса мотоцикла с мотоциклистом равна m, а их центр тяжести расположен посередине между осями колес. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность равен μ и монотонно возрастает с частотой обращения заднего колеса.

Решение:

Допустим, груз сдвинулся. Минимальная масса груза будет тогда, когда переднее колесо почти оторвалось. Следовательно, весь вес приходится на заднее колесо. По второму закону Ньютона:

$$(m + \Delta m)g = N_1$$

Если переднее колесо оторвалось, то в горизонтальном направлении движет только сила трения от заднего колеса:

$$\mu_0 Mg = \mu N_1 = \mu(m + \Delta m)g$$

Условие отрыва переднего колеса из правила моментов (то, что сила реакции опоры на второе колесо равно нулю $N_2 = 0$).

Вариант 1: масса дополнительного груза неизвестна

$$\mu(m + \Delta m_x)gR = \frac{mgL}{2} + \Delta m_x gL$$

$$\Delta m_x = \frac{m\left(\frac{L}{2} - \mu R\right)}{\mu R - L}$$

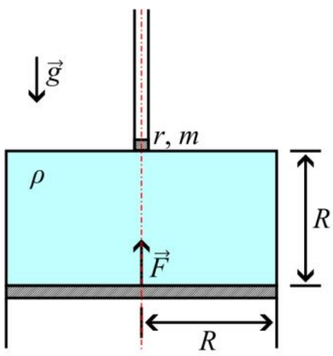
Вариант 2: расположение дополнительного груза неизвестно

$$x = \mu\left(1 + \frac{m}{\Delta m}\right)R - \frac{mL}{2\Delta m}$$

Задача 10-11.3

Вариант 1:

В сосуде с двумя поршнями, как показано на рисунке, находится идеальная несжимаемая жидкость в поле силы тяжести. Трение между поршнями и стенками отсутствует. В начальный момент поршни и жидкость покоятся. Затем большой поршень начинает действовать на жидкость с постоянной силой $\boldsymbol{F}$, в результате чего маленький поршень начинает подниматься. **Найдите максимальную высоту подъёма** малого поршня $\boldsymbol{h_{max}}$, используя предположения, что $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{h_{max}}$, где $\boldsymbol{r}$ - радиус узкой трубки, $\boldsymbol{R}$ **-** радиус большого поршня. Считайте, что жидкость движется без завихрений и скорость однородна по сечению узкой трубки. Известны следующие величины: масса $\boldsymbol{m}$ и радиус **r** малого поршня, радиус **R** большого поршня и приложенная к нему сила $\boldsymbol{F}$, плотность жидкости $\boldsymbol{\rho}$, ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$.



Решение:

Найдём максимальную высоту через энергии. В данной системе работа **A** совершается поршнем, когда он перемещается. За счёт этой работы увеличиваются кинетические и потенциальные энергии малого поршня и жидкости:

$$A = \Delta E_{\text{пот,пор}} + \Delta E_{\text{кин,пор}} + \Delta E_{\text{пот,ж}} + \Delta E_{\text{кин,ж}}$$

Получим выражения для каждого из слагаемых, пренебрегая малыми величинами.

Работу можно выразить как

$$A = FH = Fh\frac{r^2}{R^2}$$

Где было использовано соотношение

$$hr^2 = HR^2$$

т.к. объём жидкости сохраняется (объём жидкости, поднявшейся в узкую трубку, равен объёмы, вытесненному большим поршнем).

Увеличение потенциальной энергии поршня в поле силы тяжести находится как:

$$\Delta E_{\text{пот,пор}} = mgh$$

Увеличение кинетической энергии поршня находится как:

$$\Delta E_{\text{кин,пор}} = \frac{mv_r^2}{2}$$

где v_r - скорость поршня и жидкости в узкой трубке радиуса r.

Увеличение потенциальной энергии жидкости в поле силы тяжести можно найти как:

$$\Delta E_{\text{пот,ж}} = E_{\text{пот,ж}}(h) - E_{\text{пот,ж}}(0) = \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R\right) - \rho\pi R^2 H\, g\, \left(\frac{1}{2}H\right)$$
$$= \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R - \frac{1}{2}H\right)$$

где $\rho\pi r^2 h$ - масса жидкости в узкой трубке, а $\left(\frac{1}{2}h + R\right)$ - высота центра масс над начальным уровнем большого поршня. В рассматриваемом состоянии системы этот объём жидкости появился вместо вытесненного большим поршнем объёма $\rho\pi R^2 H$ с центром масс на высоте $\frac{1}{2}H$.

Так как имеется следующее соотношение

$$\frac{H}{h} = \frac{r^2}{R^2} << 1$$

то есть H << h, последним слагаемым в выражении $\Delta E_{\text{пот,ж}}$ можно пренебречь, и тогда

$$\Delta E_{\text{пот,ж}} = \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R\right)$$

Увеличение кинетической энергии жидкости можно записать как

$$\Delta E_{\text{кин,ж}} = \rho\pi r^2 h \frac{v_r^2}{2} + E_R$$

Где E_R - кинетическая энергия жидкости в большом резервуаре. Вблизи большого поршня жидкость двигается вверх с его скоростью, а вблизи соединения с узкой трубкой ускоряется. В общем случае, её стоит вычислять как

$$E_R = \rho \int\limits_V \frac{v(\vec{x})}{2} d\vec{x}$$

Характерные размеры переходной области, где жидкость ускоряется и движется со скоростью, уже близкой к v_r, совпадают с радиусом узкой трубки. Можно считать, что в остальной области скорость близка к скорости большого поршня v_R. Тогда можно подобрать две константы C_1 и C_2, значения которых имеют порядок единицы, что

$$E_R = C_1 \rho\pi r^2 r \frac{v_r^2}{2} + C_2 \rho\pi R^2 R \frac{v_R^2}{2}$$

Из несжимаемости жидкости, для скоростей имеется соотношение

$$v_r r^2 = v_R R^2$$

Откуда

$$v_R^2 = v_r^2 \frac{r^4}{R^4}$$

Тогда

$$E_R = \rho\pi r^2 r \frac{v_r^2}{2}\left(C_1 + C_2 \frac{r}{R}\right)$$

Теперь видно, с учётом r << h, что эта часть кинетической энергии много меньше первого слагаемого в выражении $\Delta E_{\text{кин,ж}}$. То есть кинетической энергией жидкости в большом резервуаре можно пренебречь. Тогда можно записать

$$\Delta E_{\text{кин,ж}} = \rho\pi r^2 h \frac{v_r^2}{2}$$

В итоге получаем следующее уравнение:

$$Fh\frac{r^2}{R^2} = mgh + \frac{mv_r^2}{2} + \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R\right) + \rho\pi r^2 h \frac{v_r^2}{2}$$

В системе поршень и жидкость сначала будут ускоряться, затем, когда поршень поднимется выше равновесного положения, он начнёт замедляться. В наивысшей точке его скорость обратиться в ноль:

$$v_r = 0$$

И в уравнении можно будет сократить h. Получим

$$F\frac{r^2}{R^2} = mg + \rho\pi r^2 g\, \left(\frac{1}{2}h_{max} + R\right)$$

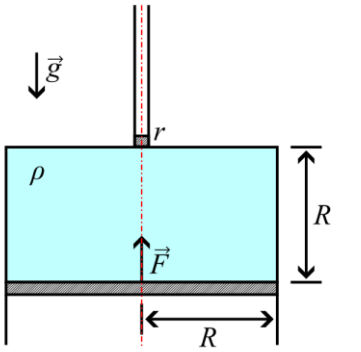
Откуда можно найти h_{max}

$$\frac{1}{2}h_{max} + R = \frac{F\frac{r^2}{R^2} - mg}{\rho\pi r^2 g}$$

$$h_{max} = \frac{2F}{\rho\pi R^2 g} - \frac{2m}{\rho\pi r^2} - 2R$$

Вариант 2:

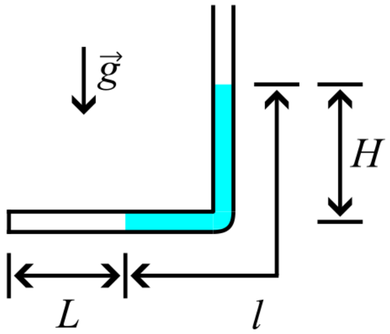
В сосуде с двумя поршнями, как показано на рисунке, находится идеальная несжимаемая жидкость в поле силы тяжести. Трение между поршнями и стенками отсутствует. В начальный момент поршни и жидкость покоятся. Затем большой поршень начинает действовать на жидкость с постоянной силой $\boldsymbol{F}$, в результате чего маленький поршень начинает подниматься. **Найдите массу малого поршня**, если в определённый момент движения были измерены высота подъёма $\boldsymbol{h_0}$ и скорость $\boldsymbol{v_0}$ поршня. Используйте предположения, что $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{h_0}$, где $\boldsymbol{r}$ - радиус узкой трубки, $\boldsymbol{R}$ **-** радиус большого поршня. Считайте, что жидкость движется без завихрений и скорость однородна по сечению узкой трубки. Также известны следующие величины: радиус **r** малого поршня, радиус **R** большого поршня и приложенная к нему сила $\boldsymbol{F}$, плотность жидкости $\boldsymbol{\rho}$, ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$.



Задача 11.1

Вариант 1:

Изогнутый капилляр, запаянный с одной стороны и открытый с другой, частично заполнен жидкостью плотностью ρ. Радиус капилляра много меньше его длины. У запаянного конца капилляра находится воздушный пузырь, отрезанный от внешней среды слоем жидкости. Границы между жидкостью и газом перпендикулярны стенкам капилляра.



В результате диффузии частиц газа сквозь жидкость объем пузырька постепенно уменьшается. В некоторый момент времени расположение столбика жидкости и пузыря воздуха в капилляре было таким, как изображено на рисунке. Определите скорость, с которой будет опускаться столбик жидкости в этот момент, если плотность потока диффузии частиц сквозь столб жидкости постоянна вдоль столба жидкости и пропорциональна разности концентраций частиц у поверхностей жидкости:

$$J = -\mathrm{C}\,\frac{n - n_b}{l}.$$

Эта величина показывает, сколько частиц проходит через единицу площади за единицу времени. В приведенном выражении n – концентрация частиц газа во внешней среде, n_b – концентрация частиц газа в пузыре, l – полная длина участка капилляра, заполненного жидкостью, С – коэффициент пропорциональности.

Жидкость не испаряется, газ в пузырьке считайте идеальным, давление во внешней среде равно P, температура равна T. Ускорение свободного падения равно g. Геометрические параметры, приведенные на рисунке, считайте известными.

Решение:

Давление газа и концентрация частиц связаны как:

$$P = nkT$$

Тогда поток диффузии выражается как:

$$J = -\frac{C}{KT}\frac{P - P_b}{l},$$

Столб жидкости создаёт дополнительное давление, поэтому

$$P_b = P + \rho g H$$

Откуда можно выразить диффузионный поток

$$J = \frac{C\rho g H}{kTl}$$

Эта величина показывает, сколько молекул проходит через единицу площади за единицу времени:

$$dN = J\,dS\,dt$$

Зная, сколько молекул уходит из пузыря, можно понять, как меняются его размеры.

Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$PV = NkT$$

Где

$$V = LS$$

S - площадь сечения капилляра.

Через малое dt в пузыре уменьшится количество молекул на dN, из-за чего его объем уменьшится на $dV = SdL$. В результате этого уменьшится длина вертикального участка, заполненного жидкостью, и давление уменьшится на dP. В результате уравнение состояния запишется как:

$$(P_b - dP)(L - dL)S = (N - dN)kT$$

Где

$$dP = \rho g\,dH$$

$$dH = dL$$

$$dN = \frac{C\rho g H}{kTl}\,S\,dt$$

При этом изменением H в выражении для dN можно пренебречь. Подставляя, получаем:

$$(P_b - \rho g\,dL)(L - dL)S = \left(N - \frac{C\rho g H}{kTl}\,S\,dt\right)kT$$

$$P_b LS\ - P_b S\,dL - \rho g LS\,dL + \rho g S\,dL^2 = NkT - \frac{C\rho g H}{l}\,S\,dt$$

В этом выражении $P_b LS$ и NkT сокращаются, после чего также можно поделить выражение на S. Кроме того, слагаемым $\rho g S\,dL^2$ можно пренебречь по сравнению с другими, т.к. в нём фигурирует квадрат малой величины. В итоге:

$$(P_b + \rho g L)\, dL = \frac{C\rho g H}{l}\, dt$$

Или, расписывая P_b:

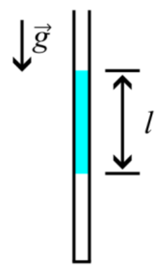
$$(P + \rho g H + \rho g L)\, dL = \frac{C\rho g H}{l}\, dt$$

Откуда скорость изменения длины пузыря:

$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{C\rho g H}{l\big(P + \rho g (H + L)\big)}$$

Вариант 2:

Вертикальный капилляр, запаянный снизу и открытый сверху, частично заполнен жидкостью плотностью ρ. Радиус капилляра много меньше его длины. У запаянного конца капилляра находится воздушный пузырь, отрезанный от внешней среды слоем жидкости высотой l. Границы между жидкостью и газом перпендикулярны стенкам капилляра.



В результате диффузии частиц газа сквозь жидкость объем пузырька постепенно уменьшается. Определите скорость, с которой будет опускаться столбик жидкости, если процесс диффузии можно описать следующий образом:

1) Концентрация молекул газа c в жидкости у поверхности пропорциональна давлению газа P около этой поверхности: $c = \lambda P$, где λ - известный коэффициент.

2) Поток растворённых молекул газа J можно найти из закона Фика: $J = -D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}y}$ (приведена одномерная постановка, когда концентрация меняется только по координате y), где D - известный коэффициент диффузии (размерность м^2/с). Считайте, что размеры пузыря меняются очень медленно, что распределение концентрации газа в жидкости успевает установиться, т.е. на всём протяжении области, занятой жидкостью, диффузионный поток одинаков.

Жидкость не испаряется, газ в пузырьке считайте идеальным, давление во внешней среде равно P, температура равна T. Ускорение свободного падения равно g.

Решение:

Раз на всём протяжении области, занятий жидкостью, потом постоянен, то можно заключить, что концентрация растворённого газа меняется линейно. Тогда можно написать, что поток молекул газа из пузыря наружу равен

$$J = -D\frac{c - c_b}{l} = -\lambda D\frac{P - P_b}{l}$$

Где c_b - концентрация молекул газа вблизи пузыря и P_b - давление газа в нём.

Столб жидкости создаёт дополнительное давление, поэтому

$$P_b = P + \rho g l$$

Откуда можно выразить диффузионный поток

$$J = \lambda D \rho g$$

Размерность потока, как следует из закона Фика, это $\frac{1}{м^2 с}$, т.е. эта величина показывает, сколько молекул проходит через единицу площади за единицу времени:

$$dN = J\, dS\, dt$$

Зная, сколько молекул уходит из пузыря, можно понять, как меняются его размеры.

Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$PV = NkT$$

Где

$$V = LS$$

S - площадь сечения капилляра.

Через малое dt в пузыре уменьшится количество молекул на dN, из-за чего его длина уменьшится на dL. Уравнение состояния запишется как:

$$P_b(L - dL)S = (N - dN)kT$$

Где

$$dN = \lambda D \rho g\, S\, dt$$

При этом изменением H в выражении для dN можно пренебречь. Подставляя, получаем:

$$P_b(L - dL)S = (N - \lambda D \rho g\, S\, dt)kT$$

$$P_b LS\; - P_b S\, dL = NkT - \lambda D \rho g\, kTS\, dt$$

В этом выражении $P_b LS$ и NkT сокращаются, после чего также можно поделить выражение на S. В итоге:

$$P_b dL = \lambda D \rho g\, kT\, dt$$

Или, расписывая P_b:

$$(P + \rho g l)\, dL = \lambda D \rho g\, kT\, dt$$

Откуда скорость изменения длины пузыря:

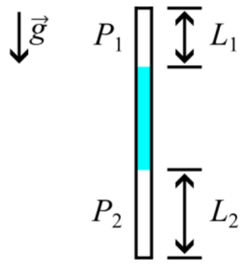
$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{\lambda D \rho g k T}{P + \rho g l}$$

Вариант 3

Вертикальный капилляр, запаянный сверху и снизу, частично заполнен жидкостью: слой жидкости разделяет объём газа на два пузыря. Радиус капилляра много меньше его длины. Границы между жидкостью и газом перпендикулярны стенкам капилляра.

В результате диффузии частиц газа сквозь жидкость объем верхнего пузырька постепенно увеличивается, а нижнего – уменьшается. В некоторый момент времени расположение столбика жидкости и пузырей воздуха в капилляре было таким, как изображено на рисунке. Определите скорость, с которой опускается столбик жидкости в этот момент, если плотность потока диффузии частиц сквозь столб жидкости J известна. Эта величина показывает, сколько частиц проходит через единицу площади за единицу времени.

Жидкость не испаряется, газ считайте идеальным, температура равна T. Размеры пузырей и давление газа в них в рассматриваемом моменте считайте известными.



Решение

Величина диффузионного показывает, сколько молекул проходит через единицу площади за единицу времени:

$$dN = J\,dS\,dt$$

Зная, сколько молекул уходит из пузыря, можно понять, как меняются его размеры.

Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$PV = NkT$$

Где

$$V = LS$$

S - площадь сечения капилляра.

Через малое dt в верхнем пузыре увеличится количество молекул на dN и на столько же уменьшится в нижнем. Объём верхнего увеличится на $dV = SdL$ и на столько же уменьшится объём нижнего.

Столб жидкости создаёт постоянное дополнительное давление, откуда

$$P_2 = P_1 + \rho g l$$

Где ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, l - высота столба жидкости.

Из приведённого выражения следует, что изменение давления dP в обоих пузырях будет одинаково.

В результате уравнения состояния для двух пузырей запишутся как:

$$(P_1 + dP)(L_1 + dL)S = (N_1 + dN)kT$$

$$(P_2 + dP)(L_2 - dL)S = (N_2 - dN)kT$$

Или

$$P_1 L_1 S + L_1 S\, dP + P_1 S\, dL\ + S\, dP\, dL = N_1 kT + dNkT$$

$$P_2 L_2 S + L_2 S\, dP - P_2 S\, dL\ - S\, dP\, dL = N_2 kT - dNkT$$

С учётом

$$P_1 L_1 S = N_1 kT$$

$$P_2 L_2 S = N_2 kT$$

И

$$dN = JS\, dt$$

Можно сократить ряд слагаемых, а затем поделить на S.

Кроме того, слагаемым $dP\, dL$ можно пренебречь по сравнению с другими, т.к. в нём фигурирует квадрат малой величины.

В результате система уравнений сведётся к

$$L_1\, dP + P_1\, dL\ = JkT\, dt$$

$$L_2\, dP - P_2\, dL\ = JkT\, dt$$

Из второго уравнения можно выразить dP

$$dP = \frac{P_2}{L_2} dL + \frac{JkT}{L_2} dt$$

И подставить в первое

$$L_1\ \left(\frac{P_2}{L_2} dL + \frac{JkT}{L_2} dt\right) + P_1\, dL\ = JkT\, dt$$

$$\left(P_1 + \frac{L_1}{L_2} P_2\right)\, dL\ = JkT\left(1 - \frac{L_1}{L_2}\right)\, dt$$

Откуда скорость выразится как

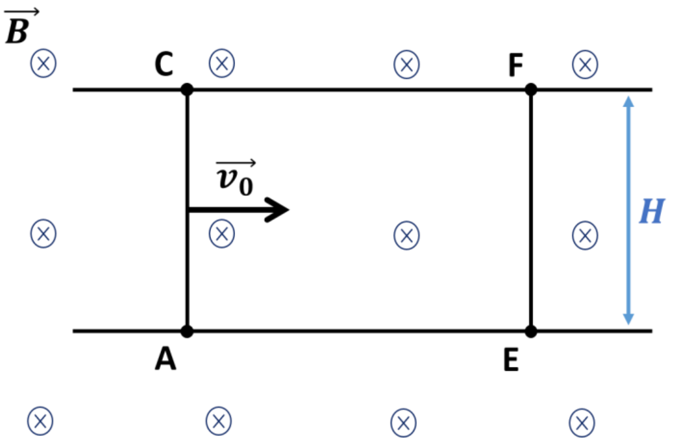
$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{JkT\left(1 - \frac{L_1}{L_2}\right)}{P_1 + \frac{L_1}{L_2} P_2}$$

Выражая P_2, получим

$$v = \frac{JkT\left(1 - \frac{L_1}{L_2}\right)}{P_1 + \frac{L_1}{L_2} P_2}$$

Задача 11.2

Металлические стержни AC и EF расположены на параллельных проводящих рельсах, стержень EF закреплен; стержень AC может свободно передвигаться вдоль рельсов, изначально покоится. Начальное расстояние между стержнями L_0. Вся конструкция помещена в однородное магнитное поле с индукцией B (см. рисунок). Стержню AC сообщают начальную скорость v_0 по направлению к стержню EF. Определите величину и направление силы Ампера, действующую на стержень AC в момент, когда расстояние между стержнями будет равно L. Длина стержней H, масса m, сопротивление единицы длины стержней и рельсов одинаково и равно λ. Индуктивностью стержней и рельсов пренебречь.



Решение

В результате движения стержня в магнитном поле в контуре ABCD возникнет ЭДС индукции:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -BH\frac{dL}{dt}$$

где $L = L(t)$ – расстояние между стержнями. В результате по контуру будет течь ток:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{BH}{2\lambda(H+L)}\frac{dL}{dt}$$

Направление тока будет по часовой стрелке.

На подвижный стержень будет действовать сила Ампера:

$$F = m\frac{dv}{dt} = IBH = \frac{B^2H^2}{2\lambda(H+L)}\frac{dL}{dt}$$

Направление силы будет противоположно направлению начальной скорости, стержень будет тормозится. Запишем уравнение движения стержня, направив ось координат вправо ($\frac{dL}{dt} < 0$):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{B^2H^2}{2\lambda m(H+L)}\frac{dL}{dt}$$

$$dv = \frac{B^2H^2}{2\lambda m(H+L)}dL => v(L) = v_0 + \frac{B^2H^2}{2\lambda m}\ln\left(\frac{H+L}{H+L_0}\right)$$

Имея в виду, что скорость стержня связана с изменением расстояния между стержнями, можем записать выражение для величины силы Ампера:

$$v(L) = -\frac{dL}{dt} => F = \frac{BH}{2\lambda(H+L)}\left(v_0 + \frac{B^2H^2}{2\lambda m}\ln\left(\frac{H+L}{H+L_0}\right)\right)$$