

**Задания отборочного этапа Олимпиады школьников СПбГУ
2018–2019 учебного года по комплексу предметов
Инженерные системы
8-9 класс**

(задания на 2 часа).

Задача № 1

Вариант 1.

Определите, какой площади должна быть льдина, чтобы выдержать рыбака массой 80 кг и его машину массой 1 т, если известно, что толщина подводной части льдины в 10 раз больше надводной? Плотность льда 900 кг/м³, плотность воды 1000 кг/м³, толщина льдины 77 см.

Указание: необходимо рассмотреть ситуацию, когда под действием груза льдина погрузится в воду; случай опрокидывания льдины и соскальзывания по ней рыбака и машины не рассматривается!

Решение:

Льдина с рыбаком и машиной не утонет, если действующая на нее сила тяжести не превышает выталкивающую силу

$$F_{\text{выт}} \geq F_{\text{тяж}},$$
$$F_{\text{тяж}} = (m_{\text{льдины}} + m_{\text{рыбака}} + m_{\text{машины}}) \cdot g,$$
$$F_{\text{выт}} = \rho_{\text{воды}} \cdot g \cdot V_{\text{погруж.}}$$

Здесь через m обозначены соответствующие массы, через ρ — плотность, через V — объем, а g — ускорение свободного падения.

Сокращая на g , получаем следующее неравенство:

$$\rho_{\text{воды}} \cdot V_{\text{погруж.}} \geq m_{\text{льдины}} + m_{\text{рыбака}} + m_{\text{машины}}.$$

Подставим массу льдины

$$m_{\text{льдины}} = \rho_{\text{льда}} \cdot V_{\text{льда}}.$$

Тогда

$$\rho_{\text{воды}} \cdot V_{\text{погруж.}} \geq \rho_{\text{льда}} \cdot V_{\text{льда}} + m_{\text{рыбака}} + m_{\text{машины}}.$$

Полный объем льдины равен

$$V = S \cdot h = V_{\text{погр.}} + V_{\text{надвод.}},$$

где S — площадь ее поверхности, а h — толщина.

Подставляя в неравенство, получим

$$\rho_{\text{воды}} \cdot S \cdot h_{\text{погруж.}} \geq \rho_{\text{льда}} \cdot S \cdot (h_{\text{погр.}} + h_{\text{надвод.}}) + m_{\text{рыбака}} + m_{\text{машины}}.$$

Так как по условию $10 \cdot h_{\text{надвод.}} = h_{\text{погр.}}$, то $h_{\text{надвод.}} + h_{\text{погр.}} = 1.1 \cdot h_{\text{погр.}}$.

Подстановка этого соотношения в неравенство дает

$$\rho_{\text{воды}} \cdot S \cdot h_{\text{погруж.}} - \rho_{\text{льда}} \cdot S \cdot 1.1 \cdot h_{\text{погр.}} \geq m_{\text{рыбака}} + m_{\text{машины}}.$$

Выразим отсюда площадь поверхности льдины:

$$S \geq \frac{m_{\text{рыбака}} + m_{\text{машины}}}{h_{\text{погр.}} (\rho_{\text{воды}} + 1.1 \cdot \rho_{\text{льда}})}.$$

Подставляя исходные данные, получаем ответ:

$$h_{\text{льдины}} = 77 \text{ см} \Rightarrow h_{\text{погр.}} = 70 \text{ см} = 0.7 \text{ м},$$
$$S \geq \frac{80 \text{ кг} + 1000 \text{ кг}}{0.7 \text{ м} \left(1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} - 1.1 \cdot 900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)} \approx 154.3 \text{ м}^3.$$

Ответ: $S \geq 154.3 \text{ м}^3$.

Вариант 2.

Определите, какой площади должна быть льдина, чтобы выдержать рыбака массой 90 кг и его машину массой 1.5 т, если известно, что толщина подводной части льдины в 10 раз больше надводной? Плотность льда 900 кг/м³, плотность воды 1000 кг/м³, толщина льдины 88 см.

Указание: необходимо рассмотреть ситуацию, когда под действием груза льдина погрузится в воду; случай опрокидывания льдины и соскальзывания по ней рыбака и машины не рассматривается!

Ответ: $S \geq 198.8 \text{ м}^3$.

Вариант 3.

Определите, какой площади должна быть льдина, чтобы выдержать рыбака массой 85 кг и его машину массой 1.2 т, если известно, что толщина подводной части льдины в 10 раз больше надводной? Плотность льда 900 кг/м³, плотность воды 1000 кг/м³, толщина льдины 99 см.

Указание: необходимо рассмотреть ситуацию, когда под действием груза льдина погрузится в воду; случай опрокидывания льдины и соскальзывания по ней рыбака и машины не рассматривается!

Ответ: $S \geq 142.8 \text{ м}^3$.

Задача № 2

Вариант 1.

В мерную колбу объемом 200 мл поместили 3.58 г кристаллогидрата $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 18\text{H}_2\text{O}$. Затем в колбу налили дистиллированной воды, добились полного растворения соли, довели водой до метки и перемешали. Запишите уравнение диссоциации соли в растворе. Определите число протонов, а также количество моль частиц SO_4^{2-} , которое содержится в одном литре такого раствора.

Решение:

Общий подход:

1) При растворении кристаллогидратов солей диссоциация протекает нацело. При этом образуется два типа ионов (катионы металлов и анионы кислотных остатков) и молекулы воды.

2) Протоны содержатся в ядрах атомов, образующих данное соединение. Число протонов p^+ в атоме равно заряду ядра атома и порядковому номеру химического элемента в периодической системе. Число моль протонов $n(p^+)$ связано с количеством протонов $N(p^+)$ через число Авогадро:

$$N(p^+) = n(p^+) \cdot N_A.$$

Количество вещества протонов для каждого сорта атомов в растворе связано с количеством вещества, в состав которого входят эти атомы. Для данной задачи нас интересуют два вещества – кристаллогидрат и добавленная к нему в колбу вода. В одной молекуле воды $(2+8)=10$ протонов, в одной формульной единице кристаллогидрата, например, в $Cr_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O$, всего $(2 \cdot 24 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 8 + 18 \cdot 10) = 372$ протона. Таким образом, в 1 моль воды содержится N_A молекул воды и $10 \cdot N_A$ протонов. В 1 моль кристаллогидрата из примера $372 \cdot N_A$ протонов. Обозначим количество протонов в 1 молекуле (формульной единице) за Z . Тогда общую формулу для расчета числа протонов в n моль вещества можно записать как

$$N(p^+) = n \cdot Z \cdot N_A.$$

Количество вещества кристаллогидрата и количество вещества воды найдем по обычной формуле

$$n = \frac{m}{M},$$

где m — масса вещества, M — масса одного моля вещества.

Масса кристаллогидрата дана в условии; масса добавленной воды неизвестна. Предположим, что плотность конечных растворов равна плотности воды — 1 г/см^3 (это предположение оправдано, так как количество соли невелико относительно объема добавляемой воды, и концентрация полученного раствора низкая). В этом случае объем конечного раствора в миллилитрах численно равен массе раствора, выраженной в граммах (т.к. $1 \text{ г/см}^3 \cdot 1 \text{ мл} = 1 \text{ г/см}^3 \cdot 1 \text{ см}^3 = 1 \text{ г}$). Тогда массу добавленной в мерную колбу воды можно найти следующим образом:

$$m(\text{воды}) = m(\text{раствора}) - m(\text{кристаллогидрата}) = 200 - m(\text{кристаллогидрата}).$$

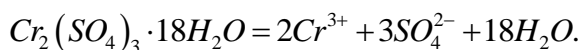
Общее количество протонов в растворе находится суммированием количеств протонов, содержащихся в воде и в кристаллогидрате.

3) Количество моль вещества в 1 литре раствора — это молярная концентрация данного вещества. Поэтому молярную концентрацию сульфат-иона в 200 мл (0.2 л) раствора найдем по следующей формуле:

$$C_M = \frac{n(SO_4^{2-})}{V_{\text{раствора}}} = \frac{n(SO_4^{2-})}{0.2}.$$

Используя рассмотренный общий подход, решим исходную задачу.

1) Выпишем уравнение диссоциации:



Замечание: здесь возможен последующий гидролиз, но он в условии задачи не указан.

2) Масса добавленной в колбу воды

$$m(\text{воды}) = m(\text{раствора}) - m(\text{кристаллогидрата}) = 200 - 3.58 = 196.42 \text{ г.}$$

Тогда

$$n_{\text{воды}} = \frac{m}{M} = \frac{196.42}{18} = 10.9 \text{ моль},$$

$$n_{\text{кристаллогидрат}} = \frac{m}{M} = \frac{3.58}{716} = 0.005 \text{ моль}.$$

Общее число протонов в растворе:

$$N(p^+) = N_A \cdot n_{\text{воды}} \cdot Z_{\text{воды}} + N_A \cdot n_{\text{кристаллогидрата}} \cdot Z_{\text{кристаллогидрата}}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$N(p^+) = 6.022 \cdot 10^{23} \cdot [10.9 \cdot 10 + 0.005 \cdot 372] = 6.68 \cdot 10^{25} \text{ штук}$$

— такое число протонов содержится в 200 мл раствора. Соответственно, в одном литре раствора протонов содержится в 5 раз больше: $3.34 \cdot 10^{26}$ штук.

3) По уравнению диссоциации из 1 моль кристаллогидрата образуется 3 моль сульфат-ионов. Значит,

$$C_M = \frac{n(SO_4^{2-})}{V_{\text{раствора}}} = \frac{0.005 \cdot 3}{0.2} = 0.075 \text{ моль/л.}$$

Ответ:

- 1) уравнение диссоциации: $Cr_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O = 2Cr^{3+} + 3SO_4^{2-} + 18H_2O$;
- 2) число протонов в 1 литре раствора: $3.34 \cdot 10^{26}$ штук;
- 3) количество моль частиц SO_4^{2-} в 1 литре раствора: 0.075 моль.

Вариант 2.

В мерную колбу объемом 200 мл поместили 4.58 г кристаллогидрата $NaAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$.

Затем в колбу налили дистиллированной воды, добились полного растворения соли, довели водой до метки и перемешали. Запишите уравнение диссоциации соли в растворе.

Определите число протонов, а также количество моль частиц SO_4^{2-} , которое содержится в одном литре такого раствора.

Ответ:

- 1) уравнение диссоциации: $NaAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O = Na^+ + Al^{3+} + 2SO_4^{2-} + 12H_2O$;
- 2) число протонов в 1 литре раствора: $3.36 \cdot 10^{26}$ штук;
- 3) количество моль частиц SO_4^{2-} в 1 литре раствора: 0.1 моль.

Вариант 3.

В мерную колбу объемом 200 мл поместили 5.03 г кристаллогидрата $KFe(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$.

Затем в колбу налили дистиллированной воды, добились полного растворения соли, довели водой до метки и перемешали. Запишите уравнение диссоциации соли в растворе. Определите число протонов, а также количество молей частиц SO_4^{2-} , которое содержится в одном литре такого раствора.

Ответ:

- 1) уравнение диссоциации: $KFe(SO_4)_2 \cdot 12H_2O = K^+ + Fe^{3+} + 2SO_4^{2-} + 12H_2O$;
- 2) число протонов в 1 литре раствора: $3.33 \cdot 10^{26}$ штук;
- 3) количество молей частиц SO_4^{2-} в 1 литре раствора: 0.1 моль.

Задача № 3

При делении ядра урана-235 (в реакции деления) выделяется энергия 200 МэВ, а при слиянии двух ядер дейтерия (в реакции синтеза) — 3.6 МэВ. Пусть в реакциях деления и реакциях синтеза сгорело по 1 грамму соответствующего ядерного топлива. В каком случае выделилось больше энергии? (Дейтерий — ядро тяжелого водорода с атомной массой 2; 1 эВ (электрон-вольт) — внесистемная единица измерения энергии равная $1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Решение:

Пусть в 1 г урана-235 содержится N ядер, столько же произойдет и реакций деления, в каждой из которых сгорит атомная масса, равная 235. При этом в сумме выделится энергия, равная $200 \cdot N$ МэВ.

В одной реакции синтеза сгорает атомная масса, равная 4. Соответственно, в одном грамме ядерного топлива, состоящего из дейтерия, произойдет $(235/4) \cdot N$ реакций, и выделится суммарная энергия, равная $(235/4) \cdot N \cdot 3.6 = 211.5 \cdot N$ МэВ, т.е. больше, чем при делении 1 г урана-235.

Ответ: в реакциях синтеза.

2018–2019
отборочный этап
8-9 класс

(задания на дом).

Задача № 1

Для фотографирования квадратного участка земли площадью 20 соток используется дрон, который равномерно поднимается вверх с центра участка со скоростью 0.5 м/с. Какое минимальное время займет подъем дрона для фотографирования всего участка, если угол обзора его камеры составляет 60° ?

Замечание: фокальная ось объектива перпендикулярна поверхности и проходит через биссектрису угла обзора объектива.

Решение:

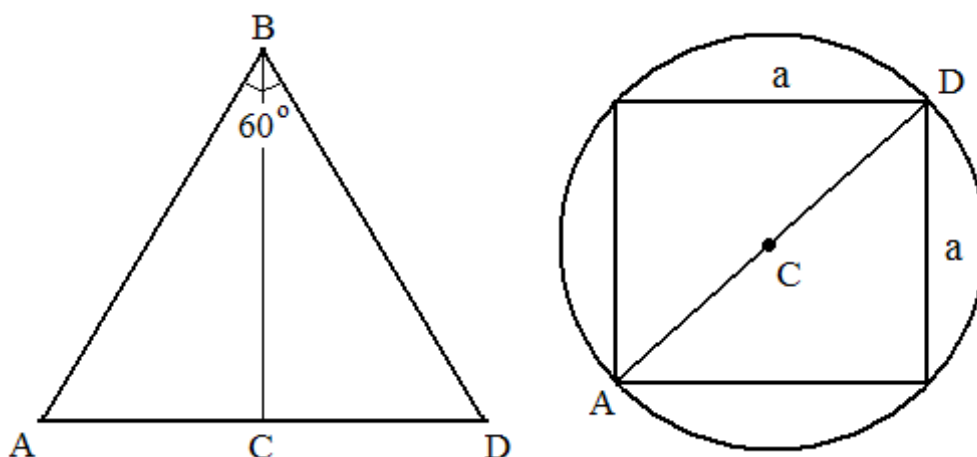
Участок поверхности земли, который попадает в поле зрения камеры дрона, имеет форму круга — основание конуса, в вершине которого находится камера. По условию, фотографируемый квадратный участок должен целиком оказаться в поле зрения камеры, т.е. внутри этого круга. Очевидно, минимальная высота подъема дрона, при которой это будет выполнено, соответствует случаю, когда квадрат — граница рассматриваемого участка, вписан в окружность — границу поля зрения камеры.

Пусть дрон, поднимаясь из точки С, через некоторое время оказался в точке В (см. рисунок). Обозначим через А и D вершины квадрата, вписанного в окружность, т.е. AD — это диагональ квадратного участка.

Из условия задачи известно, что площадь фотографируемого участка

$$S_{\text{участка}} = 20 \text{ соток} = 2000 \text{ м}^2.$$

При этом сторона участка: $a = \sqrt{2000} = 44.72 \text{ м}$, следовательно: $AD = a\sqrt{2} \approx 63.2 \text{ м}$.



Вычислим высоту BC в равнобедренном треугольнике ABC:

$$BC = \frac{AC}{\operatorname{tg} \angle ABC} = \frac{AC}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{63.2 / 2}{1/\sqrt{3}} \approx 54.7 \text{ м}.$$

Подъем дрона с постоянной скоростью 0.5 м/с на высоту 54.7 м будет осуществлен за время

$$t = \frac{54,7 \text{ м}}{0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 109.4 \text{ с.}$$

Ответ: 109.4 с.

Задача № 2

Пусть в активной зоне ядерного реактора содержится уран, при делении которого выделяются нейтроны таким образом, что

- а) число нейтронов, выделяющихся в каждом кубическом сантиметре активной зоны за одну секунду, одинаково;
- б) число нейтронов, вылетающих за одну секунду через каждый квадратный сантиметр поверхности активной зоны наружу, также одинаково.

Известно, что реактор работает тем эффективнее, чем больше выделившихся нейтронов остается внутри активной зоны. Расположите в порядке убывания эффективности работы реактора предложенные ниже геометрические фигуры, которые можно придать активной зоне, содержащей 100 кг урана:

- 1) куб с ребром $a=17.41$ см;
- 2) параллелепипед с ребрами $a=b=16.24$ см, $c=20.0$ см;
- 3) параллелепипед с ребрами $a=b=18.03$ см, $c=16.24$ см;
- 4) цилиндр с радиусом основания $R=9.16$ см и образующей $h=20.0$ см;
- 5) шар радиусом $R=10.8$ см.

Решение:

По условию, масса урана в активной зоне во всех случаях одна и та же, а, значит, одинаков и объем зоны, и, соответственно, число выделяющихся в зоне за секунду нейтронов. Поэтому ясно, что эффективность работы реактора тем больше, чем меньше S — площадь поверхности активной зоны. Найдем S во всех предложенных случаях:

- 1) $S = 6a^2 = 1818.65 \text{ см}^2$;
- 2) $S = 4 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a^2 = 1826.68 \text{ см}^2$;
- 3) $S = 4 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a^2 = 1821.39 \text{ см}^2$;
- 4) $S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (R+h) = 1678.27 \text{ см}^2$;
- 5) $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 1465.74 \text{ см}^2$.

Таким образом, правильный порядок фигур такой: 5, 4, 1, 3, 2.

Замечание: В высшей математике доказывается, что при заданном объеме отношение S/V будет минимально, если телу придана форма шара.

Ответ: 5, 4, 1, 3, 2.